

Pendelschwingungen

14.12.2020

1 Harmonische Schwingungen

1.1 Vorbereitung

Siehe Hookesches Gesetz

1.2 Durchführung

Der Pendelkörper ($m = 250 \text{ g}$) wird aus seiner Ruhelage ausgelenkt und dann sich selbst überlassen. Die Federkonstante hat den Wert $D = 20 \text{ N/m}$. Die Auslenkung darf nicht zu groß sein, damit die Feder zu keinem Zeitpunkt des Schwingungsvorgangs völlig entspannt ist.

1.3 Auswertung

Das Messsystem ist so eingestellt, dass es folgende Daten direkt misst: Zeit, Auslenkung und Rückstellkraft. Beschleunigung und Geschwindigkeit werden von der Software automatisch berechnet. In den Bildern 1.1-1.3 werden die verschiedenen Beziehungen als Zeitfunktionen dargestellt.

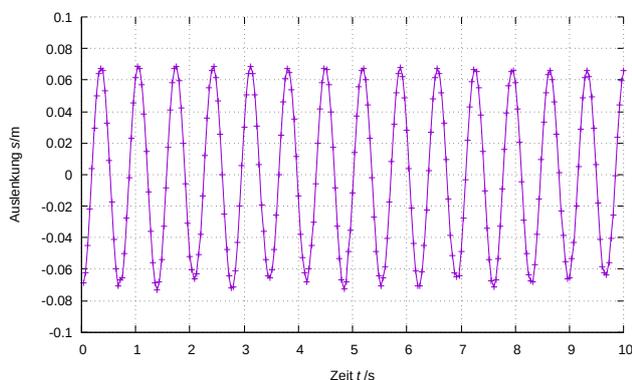


Bild 1.1: s - t -Diagramm

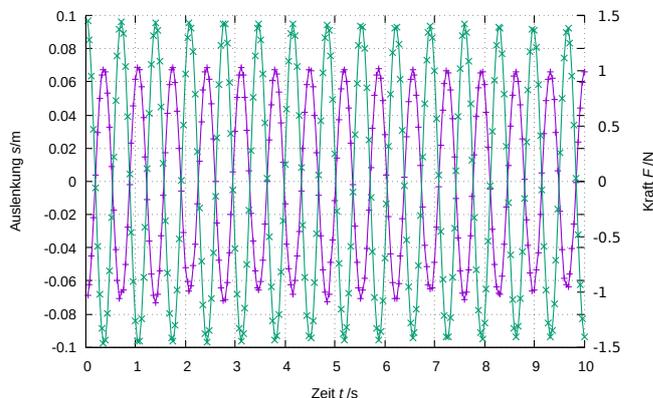


Bild 1.2: s - t - (violett) und F - t -Diagramm (grün)

Die Messpunkte sind markiert. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, sind benachbarte Punkte mit Linien verbunden (Interpolation).

In der Diskussion über das s - t -Diagramm lassen sich zwei wichtige physikalisch wichtige Aspekte ansprechen:

1. die statistischen Schwankungen der Amplitude, als grundsätzliche Fehlerquelle der Messanordnung und
2. die erkennbare Abnahme der Amplitude mit der Zeit, als Fehlerquelle durch Reibung, wobei die Frage aufgeworfen werden kann, wie sich die Anordnung im Vakuum verhalten würde.

In Bild 1.2 ist die Phasenverschiebung zwischen Auslenkung und Rückstellkraft als tatsächlich gemessenen Größen durch theoretische Betrachtungen zu ergänzen, so dass sich die Schüler einen Einblick über den Ablauf und das Ursache-Wirkungsprinzip einer Schwingung eine Vorstellung machen können.

In Bild 1.3 ist das Weg-Zeit-Diagramm und das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt. Hier ist die Phasenverschiebung sehr deutlich zu erkennen, wobei eine quantitative Bestimmung des Phasenwinkels schwieriger ist, als im Diagramm von Bild 1.2. Deshalb wurde in Bild 1.4 ein Ausschnitt aus Bild 3 dargestellt, mit dessen Hilfe eine genauere Bestimmung des Phasenwinkels ermöglicht wird.

Die benachbarte Nulldurchgänge der beiden Kurven haben gleichen Abstand. Daraus folgt die zeitliche Phasenverschiebung von $\Delta T = \frac{T}{4}$. Dies entspricht einer Verschiebung des Phasenwinkels von $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

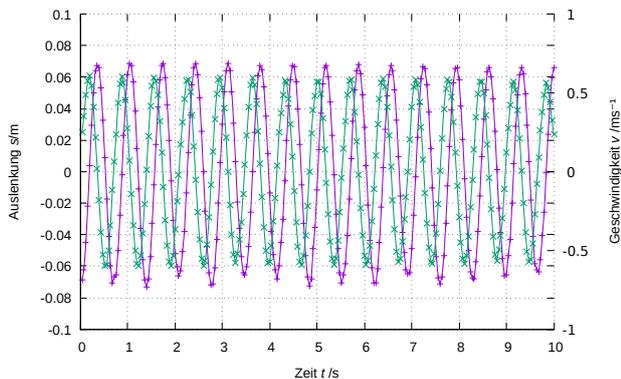


Bild 1.3: s - t - (violett) und v - t -Diagramm (grün)

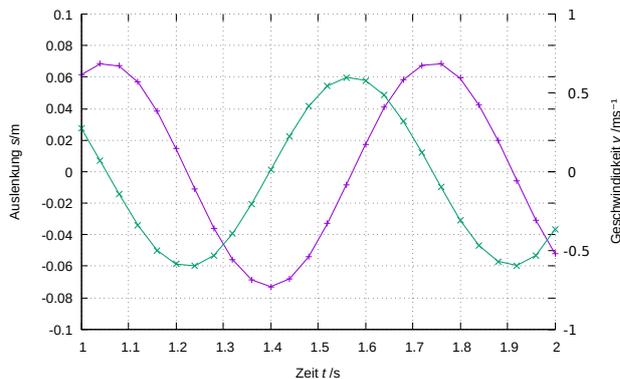


Bild 1.4: Ausschnitt aus Bild 3: 1s - 2s

Auf ein a - t -Diagramm wurde verzichtet, weil aus der Beziehung $F = m \cdot a$ folgt, dass damit keine neue Information damit verbunden ist.

Eine ganz interessante Variante lässt sich aus den Daten von Bild 1.2 ableiten, wenn man die Werte nicht gegen die Zeit aufträgt, sondern das F - s -Diagramm zeichnen lässt (Bild 1.5). Dann ergibt sich das Hookesche Gesetz mit relativ vielen Nulldurchgängen in der Vorwärts- und Rückwärtsbewegung. Die Messpunkte wurden bei der Erstellung unterdrückt.

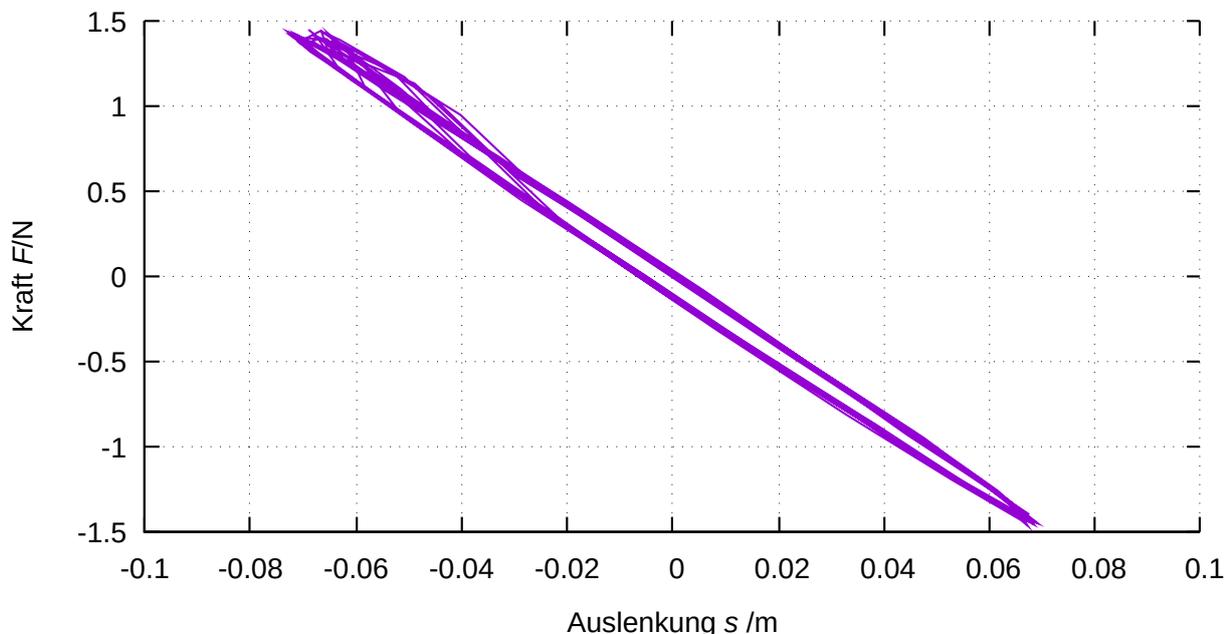


Bild 1.5: F - s -Diagramm

Diese Grafik eignet sich sehr gut für weitergehende Fragen bezüglich der Fehlerquellen. Insbesondere lassen sich auch Verbindungen zu nichtharmonischen und gedämpften Schwingungen herstellen. Das Diagramm kann zur Beurteilung der Güte einer Feder genutzt werden.

2 Nichtharmonische Schwingungen

2.1 Vorbemerkung

Der Begriff und die Bedeutung der harmonischen Schwingung können nur durch Abgrenzung zur nichtharmonischen Schwingung in ihrer Bedeutung erfasst werden. Deshalb impliziert der Lehrplan mit der Behandlung der harmonischen Schwingung auch die Behandlung von Beispielen nichtharmonischer Schwingungen wie das Fadenpendel, das Hemmungspendel oder die nachfolgend beschriebene Anordnung.

Ein in dieser Fahrbahn reibungsfrei gleitender Körper wird am oberen linken Ende schiefen Ebene losgelassen und bewegt sich dann periodisch innerhalb der Fahrbahn, er schwingt. Auch diese Schwingung ist ungedämpft und nichtharmonisch.

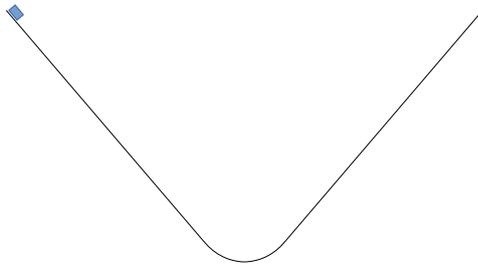


Bild 2.1 Fahrbahn

Die drei obengenannten Beispiele für nichtharmonische Schwingungen sind im Idealfall ungedämpft, wie die harmonische Schwingung einer Stahlfeder.

Im Folgenden werden zwei weitere Beispiele untersucht: 1. ein Gummipendel und 2. ein Pendel mit einer „schlechten“ Feder. Beide Beispiele wurden auch schon im Rahmen des Hookeschen Gesetzes vorgestellt. Diese beiden Beispiele sind infolge innerer Prozesse im Material gedämpfte Systeme.

2.2 Gummipendel

2.2.1 Durchführung

Ein Körper der Masse 100 g wird an einem schmalen Gummiring befestigt und in vertikale Schwingungen versetzt. Der Beginn des Schwingungsvorgangs und der Messbeginn wurden synchronisiert.

2.2.2 Auswertung

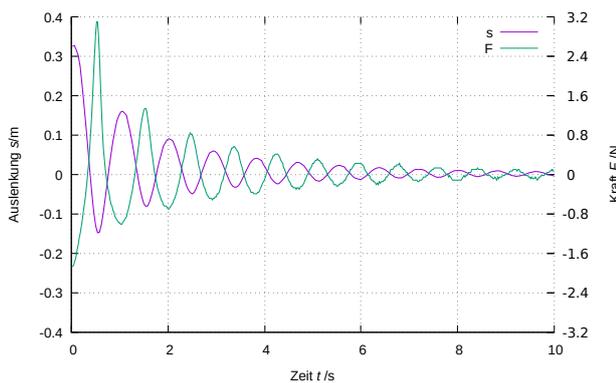


Bild 2.2 s - t - und F - t -Diagramm

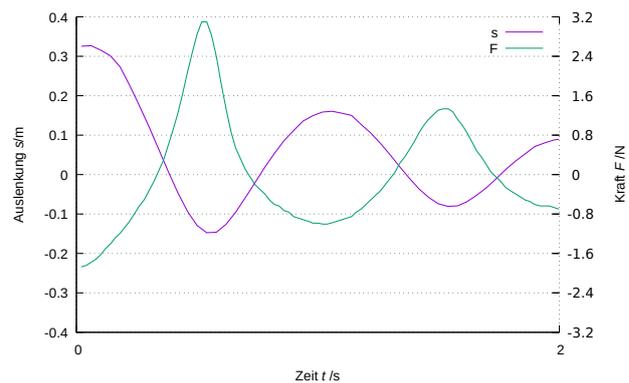


Bild 2.3 Ausschnitt aus Bild 2.1

Bild 2.2 entspricht Bild 1.2 in Bezug auf Aufbau und Durchführung des Versuches. Sowohl der Unterschied im Dämpfungsverhalten, als auch die Abweichung von der Sinusform sind deutlich zu erkennen. Bild 2.3 zeigt einen Ausschnitt, falls Bedarf besteht, quantitative Untersuchungen vorzunehmen. Hier ist deutlich zu erkennen, dass der Schnittpunkt zwischen s - t -Kurve F - t -Kurve in der Abwärtsbewegung des Pendels über, in der Aufwärtsbewegung unter der Nulllinie liegt.

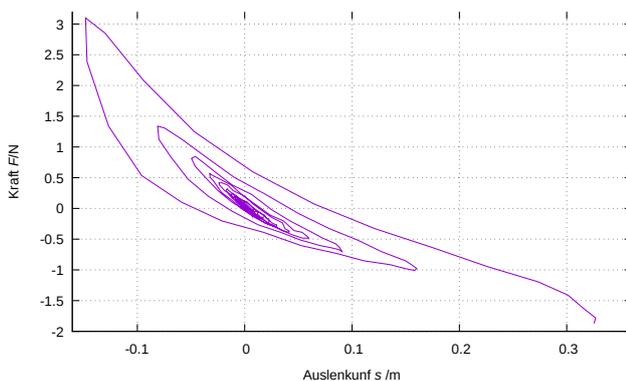


Bild 2.4 F - s -Diagramm eines Gummipendels

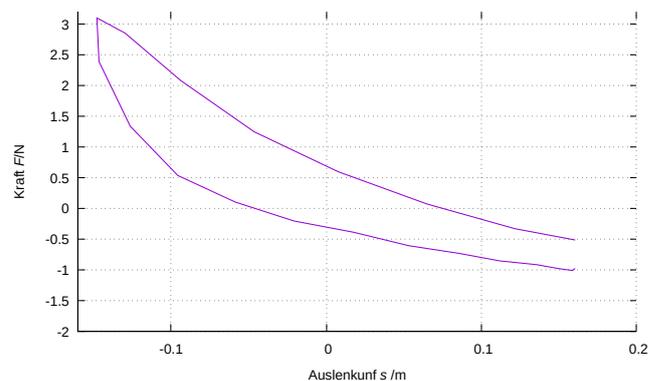


Bild 2.5 Ausschnitt aus Bild 2.4, Einzelschwingung

Dieses Verhalten kommt auch Bild 2.4 zum Ausdruck. Die Rückstellkraft ist in der Abwärtsbewegung des Pendelkörpers deutlich größer, als in der Aufwärtsbewegung. Bild 2.5 zeigt den ersten vollen Schwingungsdurchgang des Pendelkörpers. Der obere Kurvenabschnitt zeigt die Abwärtsbewegung, also die Zunahme der Gummispannung, der untere Abschnitt zeigt die Abnahme der Gummispannung. Das zwischen den beiden Kurven gelegene Flächenstück gibt den bei der Auf- und Abbewegung umgesetzten Energiebetrag an. Dieser ist negativ, d.h. die Schwingungsenergie nimmt ab, er wurde vom Gummi absorbiert.

Es handelt sich dabei um eine äußerst wichtige Eigenschaft des Materials Gummi. Sie ist der Grund, warum Gummi so oft als federndes Material eingesetzt. Er vereinigt in sich Dämpfung und Schwingung in ganz besonderer Weise.

2.3 Schwingung einer „schlechten“ Feder

2.3.1 Durchführung

Die Feder wurde durch Umwickeln eines Zylinders mit Eisendraht (0,8 mm Schweißdraht) von Hand gefertigt. Sie wurde zunächst leicht überdehnt. Die weitere Belastung erfolgte nur innerhalb des elastischen Bereiches unter Vermeidung einer Überdehnung.

2.3.2 Auswertung

In Bild 2.6 ist die Schwingung während 15 s aufgezeichnet. Es findet offenbar eine deutlich stärkere Dämpfung statt, als bei einer aus Federstahl hergestellten Feder.

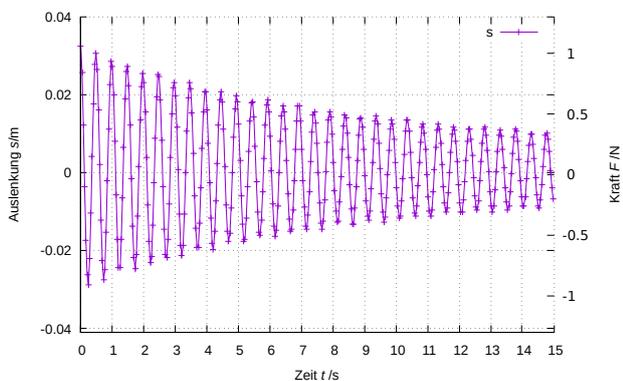


Bild 2.6 s - t -Diagramm „schlechte“ Feder

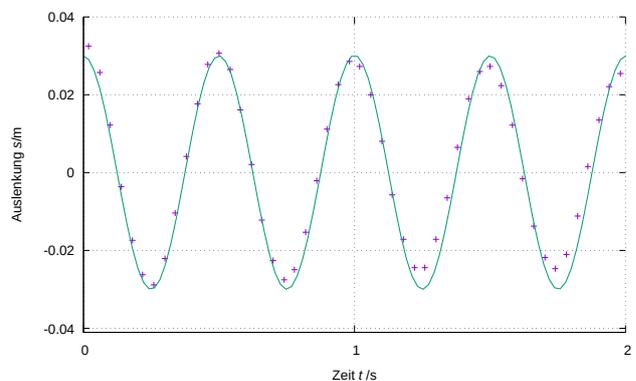


Bild 2.7 s - t -Diagramm „schlechte“ Feder, 0..2 s

Bild 2.7 stellt den 0 - 2 s -Ausschnitt aus Bild 2.6 dar. Die Messwerte der Feder sind als Punkte (violette Kreuze) dargestellt. Die grüne Kurve ist die Funktion $f(t) = 0,03 \cdot \cos(4,002 \cdot \pi \cdot t)$. Hier lässt sich sowohl die leichte Abweichung von der Sinusform, als auch die Abnahme der Amplitude erkennen.

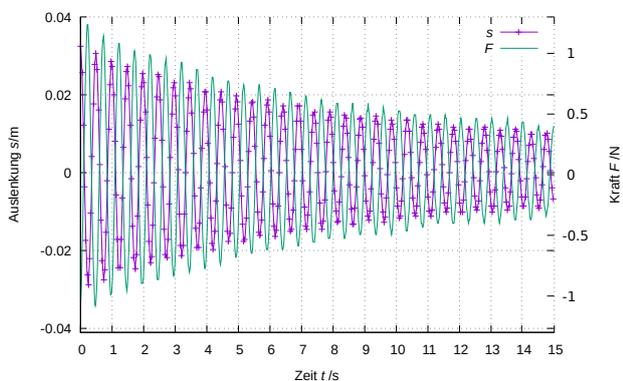


Bild 2.8 s - t - und F - t -Diagramm „schlechte“ Feder

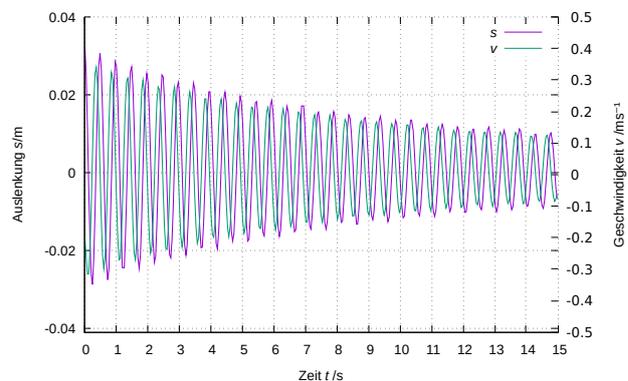


Bild 2.9 s - t - und v - t -Diagramm „schlechte“ Feder

In Bild 2.8 ist die Verschiebung zwischen Kraft und Auslenkung um den Phasenwinkel π deutlich zu erkennen. Die Phasenverschiebung zwischen Geschwindigkeit und Auslenkung ist in Bild 2.9 dargestellt. Dazu wurde, um einen genaueren Einblick zu gewähren in Bild 2.10 der Ausschnitt zwischen 0 und 1 s gedehnt dargestellt.

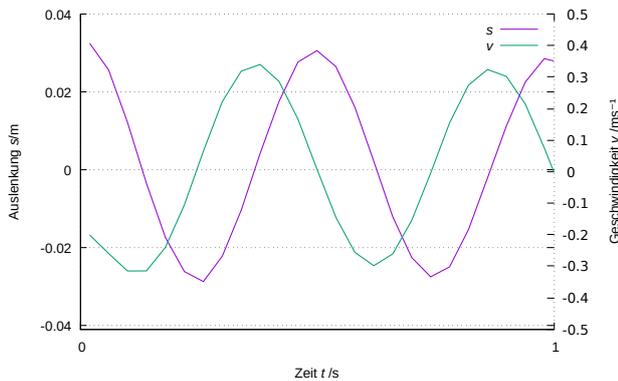


Bild 2.10 s - t - und v - t -Diagramm, Ausschnitt 0..1 s

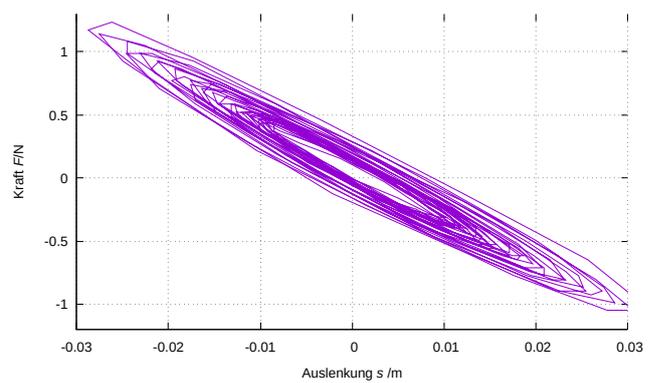


Bild 2.11 F - s -Diagramm der „schlechten“ Feder

Bild 2.11 zeigt die Hysterese der Kurve des F - s -Diagramms. Dadurch ist ein direkter Vergleich zur „guten“ Feder der harmonischen Schwingung möglich. Die durch Vor- und Rücklauf eingeschlossene Fläche im Diagramm stellt den Energieverlust während dieses Durchlaufs dar. Ein weiterer Vergleich bietet sich mit dem Gummi an, wobei allerdings die unterschiedlichen Maßstäbe zu berücksichtigen sind.

Eine „schlechte“ Feder entzieht dem schwingenden System also deutlich mehr Energie pro Schwingung, als eine „gute“ Feder. Der entzogene Energiebetrag wird von der inneren Struktur der Feder aufgenommen. Die kann sich z.B. als Erwärmung oder als dauerhafte Verlängerung der Feder auswirken. Der so entzogene Energiebetrag ist ein Maß für die Güte der Feder. Die Form der Hysteresekurve lässt also Rückschlüsse auf die Güte der Feder zu.

2.3.3 Zusatzbemerkung

Die beiden Beispiele Gummischwingung und „schlechte“ Feder wurden deshalb so ausführlich behandelt, weil sie eine außerordentlich große Bedeutung in unserem Alltag haben. Jede Küchenmaschine steht auf Gummifüßen, wir fahren mit allen Straßenfahrzeugen auf Gummirädern, Motoren werden in Gummilagern befestigt usw..

Ähnliche Bedeutung haben „schlechte“ Federn im Alltag. Allerdings ist die Ursache dafür eine andere. Jede Stahlfeder ermüdet im Laufe längeren intensiven Gebrauchs. Dann läßt ihre Güte nach, sie wird schlechter und muss ausgetauscht werden, oder sie kommt irgendwann zu Bruch.

Vielleicht wäre noch ein Versuch interessant, die Feder einer Dauerbelastung auszusetzen und den Verlängerungsfaktor zu bestimmen.

3 Gedämpfte Schwingungen

3.1 Vorbemerkung

Gedämpfte Schwingungen sollen nach Lehrplan ausdrücklich behandelt werden, weil sie im Alltag eine sehr große Rolle spielen (siehe auch unter 2.3.3).

Oft werden Systeme ungedämpfter Schwingungen durch eigene, unabhängige Anordnungen, den Stoßdämpfern, sogar künstlich gedämpft um die im Rahmen der erzwungenen Schwingungen auftretenden Resonanzen bzw. zu großen Amplituden zu verhindern (z.B. Waschmaschine).

3.2 Vorbereitung und Durchführung

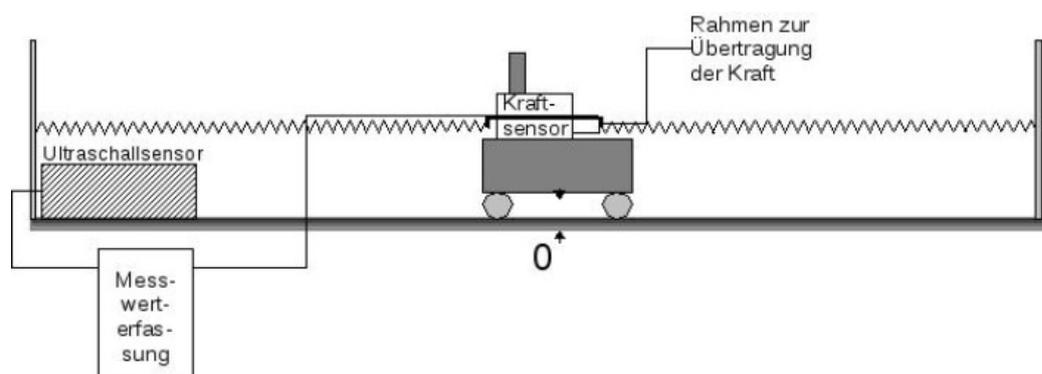


Bild 3.1 Aufbau

Im Folgenden wird ein Wagen, der sich auf einer vertikalen Fahrbahn zwischen Federn eingespannt bewegt, aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Die Weg-Zeit, Kraft-Zeit und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme der Schwingung werden dargestellt und diskutiert. Die Dämpfung erfolgt hauptsächlich durch Rollreibung.



Bild 3.2 Kraftsensor mit Rahmen

Um den Kraftsensor sowohl für die Vorwärts-, als auch für Rückwärtsbewegung einsetzen zu können, wurde er mit einem Rahmen versehen, der nur am Messpunkt (vorderer Haken) mit dem Sensor verbunden ist. Der Sensor ist fest auf dem Wagen montiert.

3.3 Auswertung

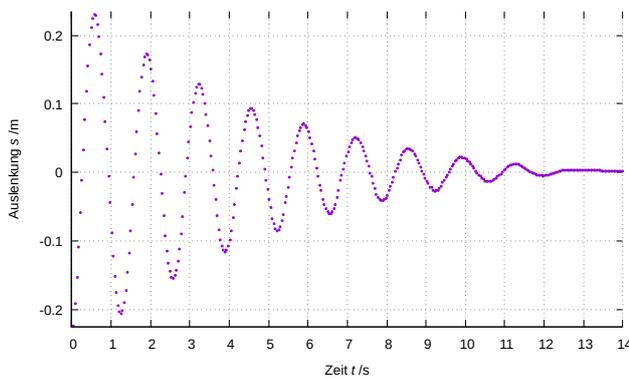


Bild 3.3 s - t -Diagramm gedämpfte Schwingung

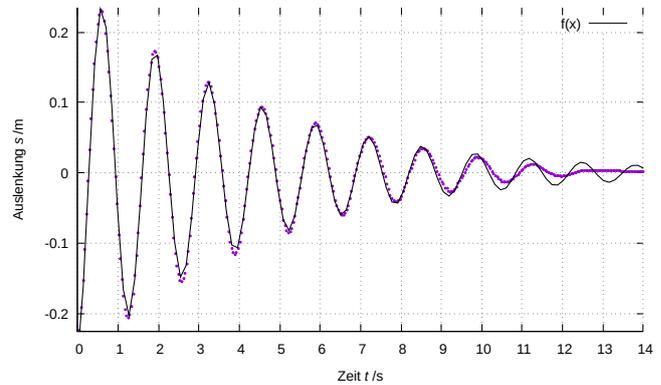


Bild 3.4 s - t -Diagramm gedämpfte Schwingung mit Fit

In Bild 3.3 ist das Weg-Zeit-Diagramm mit den tatsächlich gemessenen Punkten aufgezeichnet. Bild 3.4 zeigt dasselbe Diagramm mit einem sinusförmigen Fit der Punkte. Die Fit-Funktion hat die Form $f(t) = 0,275 \cdot \exp(-0,23 \cdot t) \cdot \cos(4,76 \cdot t)$. Es handelt sich also um eine sinusförmige Funktion mit kleiner werdender Amplitude. Bei sehr kleinen Ausschlägen werden die Abweichungen größer.

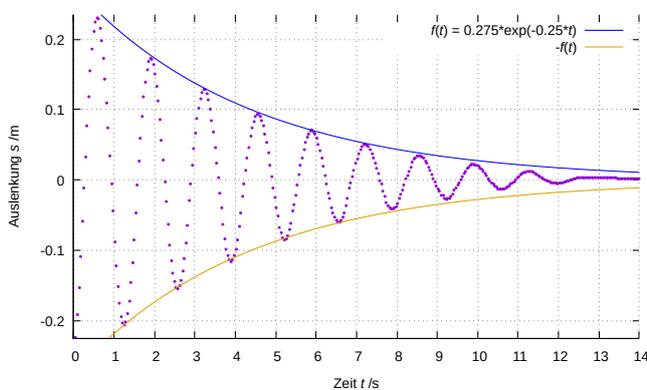


Bild 3.5 s - t -Diagramm mit Einhüllender

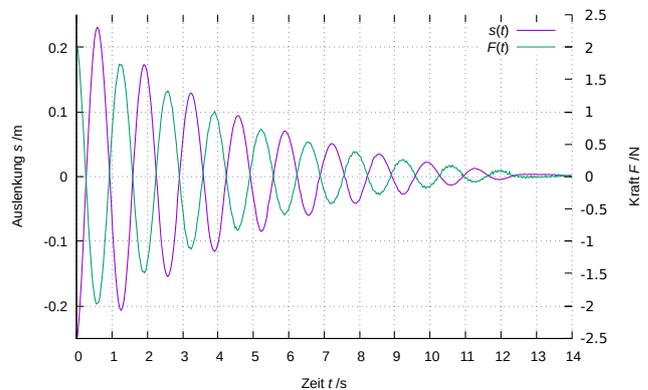


Bild 3.6 s - t - und f - t -Diagramm

Bild 3.5 zeigt das s - t -Diagramm mit den Einhüllenden, die in Bild 3.4 als Amplitude der \cos -Funktion auftritt. Bei der hier untersuchten gedämpften Schwingung handelt es sich also mit sehr guter Näherung um eine harmonische Schwingung mit exponentiellem Amplitudenabfall. Bild 3.6 zeigt eine Phasenverschiebung

zwischen Auslenkung und Rückstellkraft, die mit großer Genauigkeit den Wert π hat (man beachte z.B. die Nulldurchgänge).

Die obigen Ergebnisse lassen eine quantitative Überprüfung der Versuche zu. Im Funktionsterm (hier mit Einheiten)

$f(t) = 0,275 \text{ m} \cdot \exp(-0,23 \text{ s}^{-1} \cdot t) \cdot \cos(4,76 \text{ s}^{-1} \cdot t)$ kommen drei Zahlwerte vor. Der Erste 0,275 m gibt die Anfangsauslenkung an. der Zweite $0,23 \text{ s}^{-1}$ ist das Maß der Dämpfung und der Dritte bestimmt die Kreisfrequenz der sinusförmigen Schwingung.

Die Versuchsdaten sind:

Federkonstante: $D = 8,85 \text{ N m}^{-1}$
 Masse des Wagens $m = 0,385 \text{ kg}$

Ergebnisse:

Kreisfrequenz ungedämpft: $\omega_0 = 4,79 \text{ s}^{-1}$
 Kreisfrequenz theoretisch: $\omega_{th} = 4,78 \text{ s}^{-1}$
 Kreisfrequenz gemessen/Fit: $\omega_{Fit} = 4,76 \text{ s}^{-1}$

Die gedämpfte und die ungedämpfte Schwingung haben nahezu gleiche Kreisfrequenz. Im Rahmen der Messgenauigkeit meiner Versuchsanordnung kann ich daraus keinen Einfluss der Dämpfung auf die Frequenz ableiten. Der Messfehler meine Messung liegt bei ca. 0,4%.

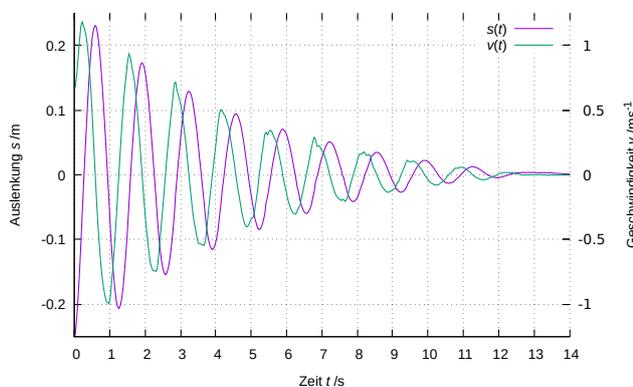


Bild 3.7 s - t - und v - t -Diagramm

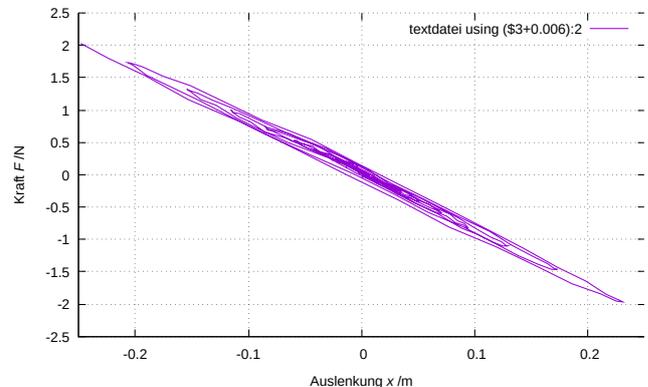


Bild 3.8 s - F -Diagramm der gedämpften Schwingung

Die Phasenverschiebung zwischen s - t - und v - t -Abhängigkeit wird durch die Dämpfung in diesem Versuch offenbar nicht beeinflusst, wie in Bild 3.7 leicht zu erkennen ist. Die Geschwindigkeit läuft der Auslenkung um $\frac{\pi}{2}$ voraus.

Interessant ist das in Bild 3.8 dargestellte s - f -Diagramm. Ein Vergleich mit Bild 2.11 zeigt, dass in diesem Fall die Energie im Gegensatz zur „schlechten“ Feder nicht in der Feder absorbiert wird. Das F - s -Diagramm der gedämpften Schwingung ist vergleichbar mit dem F - s -Diagramm der ungedämpften Schwingung, Bild 1.5. Diese Tatsache macht die Anordnung ideale Feder und Stokdämpfer so wichtig, weil in diesem Fall beide Komponenten getrennt und auf die jeweilige Situation exakt eingestellt werden können, z.B. elektronisch und selbstoptimierend. Darin liegt der Hauptunterschied zu einer reinen Gummidämpfung. Auf der anderen Seite ist die Gummidämpfung deutlich preiswerter.