

Wechselstromkreis

12.07.2021

1 Wechselspannung und Gleichspannung

Es wird der Begriff der Gleichspannung vorausgesetzt. Ein Gleichstromkreis wird durch 2 Größen gekennzeichnet: die Spannung und die Stromstärke, die allerdings in Abhängigkeit von den verwendeten Schaltelementen eindeutig miteinander zusammenhängen, so dass nur ein freier elektrischer Parameter die Verhältnisse im Stromkreis bestimmt. Im Falle einer Kennlinie wird der Parameter Spannung in Abhängigkeit von der Zeit verändert und die daraus resultierende Stromstärke bestimmt. Obwohl die Spannung nicht konstant bleibt, wird in diesem Falle von Gleichstromkreis gesprochen. Ähnlich verhält es sich bei einem Einschaltvorgang bei Gleichspannung.

Wechselspannung ist zeitabhängig und wird durch zwei weitere Parameter, die Frequenz f bzw. Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ und die Phasenverschiebung φ , charakterisiert. Es gilt: $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$.

Die Frequenz des öffentlichen Energieversorgungsnetzes beträgt in Europa und vielen weiteren Ländern 50 Hz. Das Stromnetz der Deutschen Bahn wird mit einer Frequenz von $16\frac{2}{3}$ Hz betrieben. In andern Ländern, z.B. Kanada und den USA beträgt die Frequenz 60 Hz.

2 Erzeugung einer Wechselspannung

Um eine Wechselspannung zu erzeugen, reicht es aus, im Bereich eines Leiters ein veränderliches Magnetfeld wirken zu lassen. Der Betrag der Spannung hängt von zwei Bedingungen ab:

1. Veränderungsgeschwindigkeit des Magnetfeldes
2. der Länge des vom Magnetfeld erfassten Leiterstücks

Anmerkungen: Man sagt: Die Änderung des Magnetfeldes induziert im Leiter die Spannung U . Mit dem Begriff der Änderung ist der der Zeit aufs engste verbunden: Eine Änderung kann nur im Verlaufe einer Zeitspanne erfolgen. Je schneller sich das Magnetfeld im Verlauf der Zeit ändert, umso höher wird die im Drahtstück induzierte Spannung.

Die zweite Möglichkeit, die Spannung zu erhöhen, besteht darin, ein möglichst langes Leiterstück zu verwenden. Deshalb werden meistens Spulen verwendet. In einer Spule mit 40 Windungen wird eine 40 mal höhere Spannung induziert, als in einem Drahtstück. Die Anzahl ihrer Windungen n ist ein wichtiges Charakteristikum einer Spule.

2.1 Generator

Beispiel Wir stellen uns vor, der Zeiger im Kreis des unten dargestellten Kreisdiagramms sei ein Permanentmagnet, die Spitze der Nordpol, der Südpol liege auf der gegenüberliegenden Seite des Kreises.

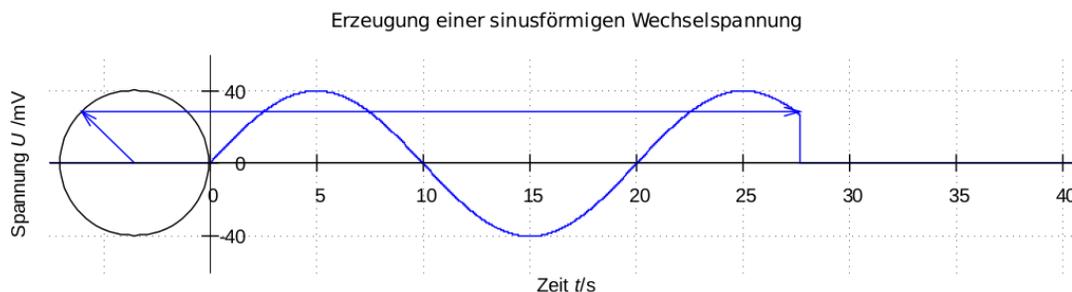


Abb. 2.1: Modell Generator

Wenn wir eine Spule über der oberen Hälfte (Achse zum Mittelpunkt) anbringen und den Magneten gegen den Uhrzeigersinn in gleichmäßige Kreisbewegung versetzen, wird in der Spule eine Spannung induziert, die ähnlich verläuft, wie die entlang der Zeitachse gezeichnete Sinuskurve.

Unter dem Link Generator lässt sich der Ablauf verfolgen. Die Zahlenwerte lassen sich aus dem Schaubild ablesen: Die Maximalspannung beträgt $\hat{U} = 40\text{mV}$; die Zeit für einen Umlauf beträgt $T = 20\text{s}$. Diese Zeit ist gleich der Schwingungsdauer der Sinusfunktion, ihre Frequenz $f = \frac{1}{T} = 0,05\text{s}$. Wird die Drehzahl des Magneten erhöht, dann steigt die Änderungsgeschwindigkeit des Magnetfeldes und die Spitzenspannung \hat{U} wird größer, die Schwingungsdauer kleiner, die Frequenz größer.

Z.B. ergibt eine Drehzahlerhöhung um den Faktor 1000 auf 50 Drehungen pro Sekunde, einen tausend mal größeren Spitzenspannungswert, also $\hat{U} = 40\text{V}$. Die Schwingungsdauer der Sinusschwingung beträgt dann 20 ms, die Frequenz 50 Hz.

2.2 Der Transformator

Auch im Transformator wird Induktionsspannung in einer Spule (Sekundärspule Windungszahl n_2) durch ein veränderliches Magnetfeld erzeugt. Im Unterschied zum Generator findet man aber hier keine beweglichen Teile. Das veränderliche Magnetfeld, das Voraussetzung für die Induktionsspannung ist, wird hier folglich auf andere Weise erzeugt.

Die Lösung ist sehr einfach. Das erforderliche Magnetfeld wird von einer anderen Spule (Primärspule Windungszahl n_1) geliefert, die von einem Wechselstrom durchflossen wird. Der Wechselstrom hat wie die Wechselspannung einen sinusförmigen Verlauf, so dass auch das in der Primärspule erzeugte Magnetfeld sinusförmig ist.

Das Magnetfeld der Primärspule wird durch die Sekundärspule geleitet und induziert dort die erwünschte Spannung. Sind die Windungszahlen von Primär- und Sekundärspule gleich ($n_1 = n_2$), so liefert die Sekundärspule die gleiche Spannung wie diejenige, mit der die Primärspule betrieben wird.

Allgemein gilt: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$, wobei sich der Index 1 auf die Primärspule, der Index 2 auf die Sekundärspule bezieht. Im Idealfall, das heißt, wenn keine Energie verloren geht, gilt für die Stromstärken $\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$. und für die Leistung: $P_1 = U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 = P_2$

3 Ohmscher Widerstand und Effektivwerte

Die bedeutendste Eigenschaft der Elektrizität ist, dass mit geringem Aufwand Energie von einem Ort zu einem anderen übertragen und am Bestimmungsort sehr effektiv in andere Energieformen umgewandelt werden kann. Für die übertragene Leistung gilt: $P = U \cdot I$. Diese Formel gilt sowohl für Gleich-, als auch für Wechselspannung. Allerdings kommen bei Wechselspannungen noch einige Besonderheiten dazu, die im Falle von Gleichspannung nicht auftreten.

Wir beschränken wir uns auf das Verhalten eines Ohmschen Widerstandes. Im Falle von Gleichspannung ist sowohl die Spannung als auch die Stromstärke von der Zeit unabhängig (Abb. 3.1).

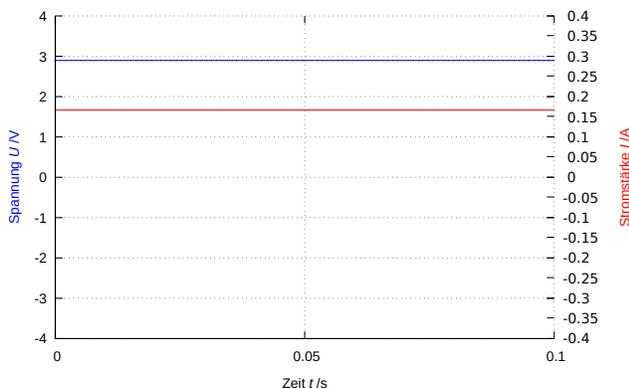


Abb. 3.1: $U(t)$ und $I(t)$ bei Gleichspannung $= 50\text{ Hz}$

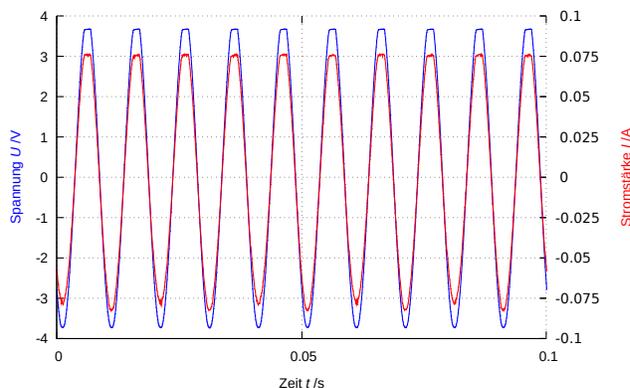


Abb. 3.2: $U(t)$ und $I(t)$ bei Wechselspannung f

Bei einer Wechselspannung mit 50 Hz variiert der Spannungswert 100 mal in der Sekunde zwischen \hat{U} und $-\hat{U}$, ebenso die Stromstärke zwischen \hat{I} und $-\hat{I}$ siehe Abb. 4. Die beiden Diagramme in Abb. 3.1 und Abb. 3.2 stellen

Messwerte dar, die unter vergleichbaren Bedingungen aufgenommen wurden. Bei 2,9 V Gleichspannung und einer Wechselspannung von mit $\hat{U} = 4,0$ V diente ein 17 Ω - Widerstand als Verbraucher. Die Aufnahme erfolgte mit jeweils 10000 Messwerten pro s.

Nun lässt sich an den Diagrammen sofort ablesen, dass der Gleichspannungswert tatsächlich bei ca. 2,9 V liegt. Im Falle von Wechselspannung stellt sich die Situation aber völlig anders dar. Trotzdem zeigt ein Wechselspannungsvoltmeter ebenfalls ca. 2,9 V an. Deshalb stellt sich die Frage, was misst ein Voltmeter im Falle von Wechselspannung tatsächlich?

Der Schlüssel zu dieser Frage liegt in dem Anliegen, der Wechselspannung den Wert zuzuordnen, den eine Gleichspannung besitzt, die in einem Ohmschen Widerstand die gleiche Leistung umsetzt wie die Wechselspannung. Deshalb beschäftigen wir uns nun mit der elektrischen Leistung, die in einem Ohmschen Widerstand umgesetzt wird.

Wie schon oben definiert gilt für die Leistung:

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Durch Multiplikation der Strom- und Spannungswerte zu jedem gemessenen Zeitpunkt t erhält man in der grafischen Darstellung den zeitlichen Verlauf der Leistung. es handel sich um eine vollständig im Positiven verlaufende Sinusschwingung.

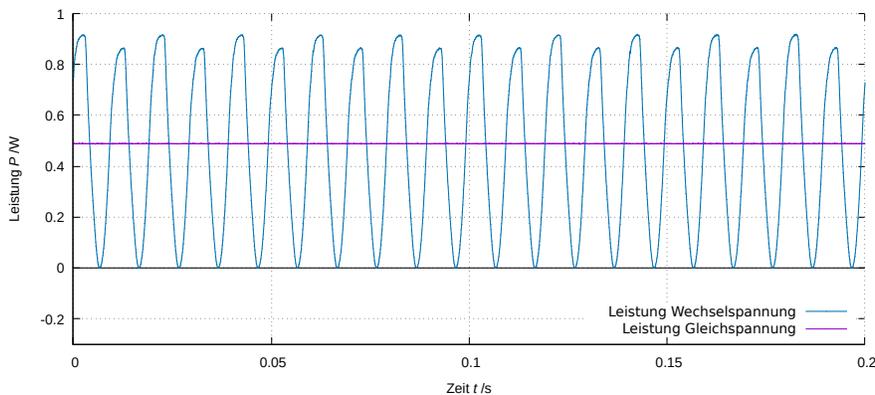


Abb. 3.3: Elektrische Leistung im Widerstand R; $P(t) > 0$ für alle t-Werte, also zu jedem Zeitpunkt.

Die violette Gerade stellt die im Widerstand umgesetzte Leistung durch die Gleichspannung (Abb. 3.1) dar. Die sinusförmige Kurve zeigt die im Widerstand umgesetzte Leistung der Wechselspannung (Abb. 3.2) in Abhängigkeit von der Zeit. Sie ist also nicht ohne weiteres mit der Leistung der Gleichspannung vergleichbar. Die Leistung der Wechselspannung pendelt 100 mal in der Sekunde zwischen 0 und 0,9 W hin und her. Der Kniff besteht nun darin, nicht die Wechselspannungskurve im Detail zu vergleichen, sondern den Mittelwert über einen längeren Zeitraum zu nehmen. Dieser numerisch aus den Daten berechnet und in Abb. 3.4 durch die schwarze Linie dargestellt.

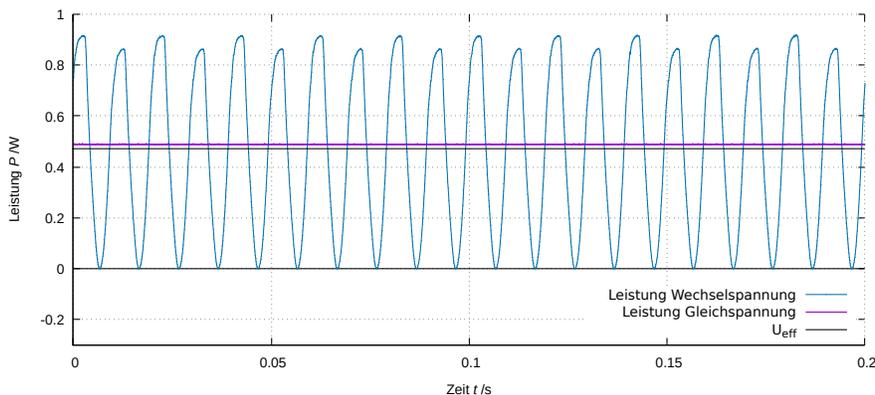


Abb. 3.4: $U_{eff}(t)$ hinzugefügt

Der so bestimmte Mittelwert wird als Effektivwert der Leistung einer Wechselspannung bezeichnet. Diejenige Gleichspannung, die im gleichen Widerstand dieselbe Leistung verrichtet heißt Effektivwert der Wechselspannung. Entsprechendes gilt für die Stromstärke. Im Falle des vorliegenden experimentellen Daten haben wir folgende Zahlenverhältnisse:

	Gleichspannung	Wechselspannung
Spannung	$U = 2,9V$	$\hat{U} = 4V$
Stromstärke	$I = 0,166A$	$\hat{I} = 0,227A$
Leistung	$P = 0,48W$	$\hat{P} = 0,916W$
Durchschnittsleistung	$P = 0,48W$	$\bar{P} = 0,472W$

Tab. 1: Vergleich Gleich- und Wechselspannung

Die Durchschnittsleistung der Wechselspannung \bar{P} und die Gleichspannungsleistung P sind im Rahmen der Messgenauigkeit gleich, sie sind halb so groß wie die Spitzenleistung \hat{P} der Wechselspannung: $P = P_{eff} = \bar{P} = \frac{1}{2}\hat{P}$.

Voraussetzungen für die Übertragung der Definition des Effektivwertes für Strom und Spannung:

1. Im Stromkreis gibt es nur ohmsche Widerstände
2. Für die Effektivwerte der Wechselspannung gelten dann die gleichen Beziehungen wie im Gleichstromkreis, also $P_{eff} = U_{eff} \cdot I_{eff}$ und $U_{eff} = R \cdot I_{eff}$, bzw. $P_{eff} = R \cdot I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$.

Aus $P_{eff} = \frac{1}{2} \cdot \hat{P}$ folgt dann sofort $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U}$ und $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I}$.

Damit sind die Effektivwerte einer Wechselspannung mit einem rein experimentellen Verfahren begründet und definiert. Die hier durchgeführte Betrachtung fußt auf einem weiteren Aspekt, der bis jetzt noch nicht explizit angesprochen, aber doch immer vorausgesetzt wurde: Die Gleichphasigkeit von Strom und Spannung am Ohmschen Widerstand (Abb. 3.2 und 3.5).

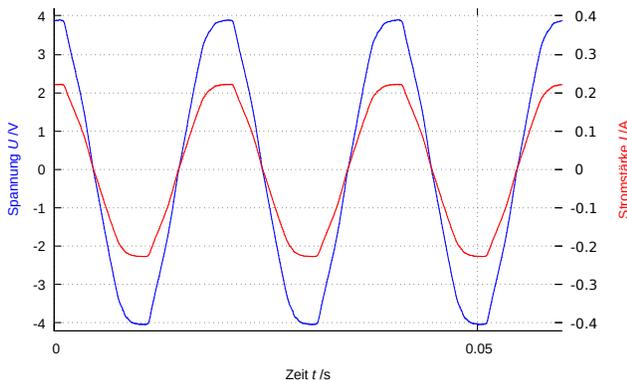


Abb. 3.5: Spannung und Stromstärke beim Ohmschen Widerstand bei 50 Hz Wechselspannung

Stromstärke und Spannung schwingen beim Ohmschen Widerstand phasengleich $U(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und $I(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Diese Aussage trifft unabhängig von der Frequenz auf alle Ohmschen Widerstände R zu ($\varphi_R = 0$).

[Link zum bewegten Zeigerdiagramm R](#)

3.1 Verallgemeinerung der Definitionen

1. Effektivwerte einer Wechselspannung werden nach obigem Verfahren über die Leistungsgleichheit mit einer Gleichspannung in einem Ohmschen Widerstand definiert.
2. Für sinusförmige Wechselspannung gilt: $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}$ und $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{I}$.
3. Der Widerstand im Wechselstromkreis ist definiert durch $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$. Im Falle eines Ohmschen Widerstandes ist $Z = R$.

4 Kondensator

Der Kondensator ist ein sehr schneller und wirkungsreicher Ladungsspeicher, der im Gleichstromkreis nur im Zusammenhang mit Ein- und Ausschaltvorgängen eine Rolle spielt (siehe Teil Kondensator), ansonsten aber einen unendlich großen Widerstand darstellt. Das ändert sich im Wechselstromkreis grundlegend. Dadurch, dass er in der Lage ist, die andauernde Ladungsverschiebung der Wechselspannung mitzumachen, wirkt er hier als ladungstransportierendes Element, und somit als Widerstand.

4.1 Kondensator im Wechselstromkreis

Genauer sind diese Verhältnisse in den unten stehenden Abbildungen dargestellt (Abb. 4.1). Wird ein Kondensator in einen Wechselstromkreis mit sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ eingebaut, so fließt Strom. Die Stromstärke ist ebenfalls sinusförmig, allerdings um $-\frac{T}{4}$ gegen die Zeitachse verschoben. Das entspricht einer Winkelverschiebung von $-\frac{\pi}{2}$. Man sagt: Die Stromstärke eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus $I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot (t + \frac{T}{4}))$; $I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$.

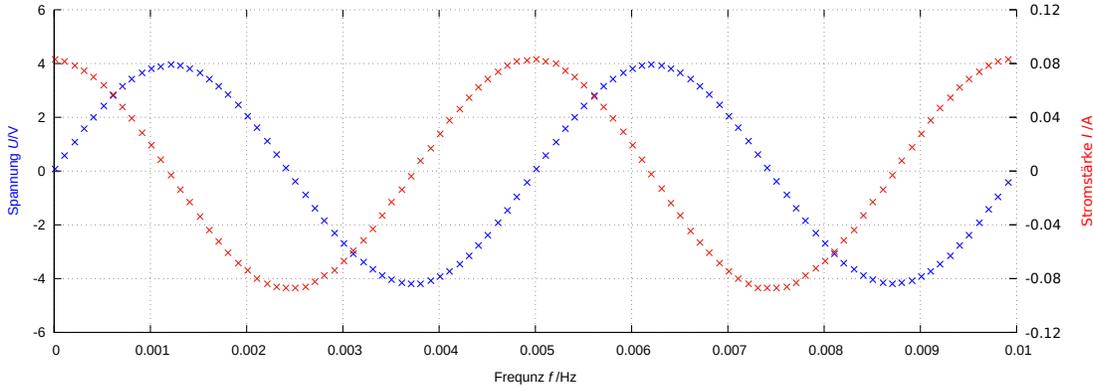


Abb. 4.1: Messpunkte $U(t), I(t)$ gemessen an einem Kondensator mit $C = 16\mu\text{F}$ bei einer Frequenz von 200 Hz.

Schlussfolgerung: Im Wechselstromkreis leitet der Kondensator Strom. Er stellt also einen Widerstand dar, der als Verhältnis U_{eff}/I_{eff} definiert ist. Nach Abschnitt 4 gilt $U_{eff}/I_{eff} = \hat{U}/\hat{I}$. Wenn wir die Scheitelspannung $\hat{U} = 3,1\text{V}$ und die Scheitelstromstärke $\hat{I} = 0,0612\text{A}$ aus der Grafik ablesen, so ergibt sich ein Widerstand von $X_C = 50,6\Omega$. Der Kapazitive Wechselstromwiderstand wird üblicherweise mit X_C bezeichnet.

Im Zeigerdiagramm für $U(t)$ und $I(t)$ ist die Verschiebung zwischen U-Zeiger (blau) und I-Zeiger (rot) von $\frac{\pi}{2}$ dargestellt:

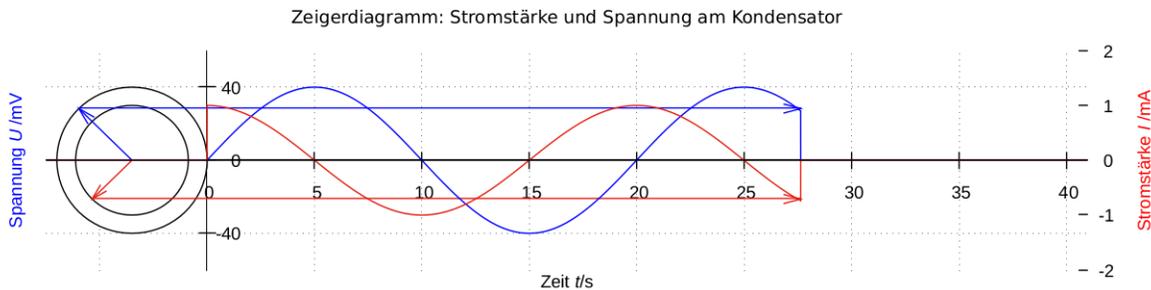


Abb. 4.2: Strom und Spannung am Kondensator; $C = 16\mu\text{F}$, $f = 200\text{ Hz}$; in Bewegung: Kondensator

4.2 Leistung im Kondensator bei Wechselstrombetrieb

Es wird dasselbe Verfahren angewandt, wie im Falle des Ohmschen Widerstandes. D.h. wir berechnen die im Kondensator umgesetzte Leistung in Abhängigkeit von der Zeit und bilden den Mittelwert. Da es sich um einen periodischen Vorgang handelt, genügt es, den Mittelwert über eine volle Schwingung zu ermitteln, also über den Zeitraum T .

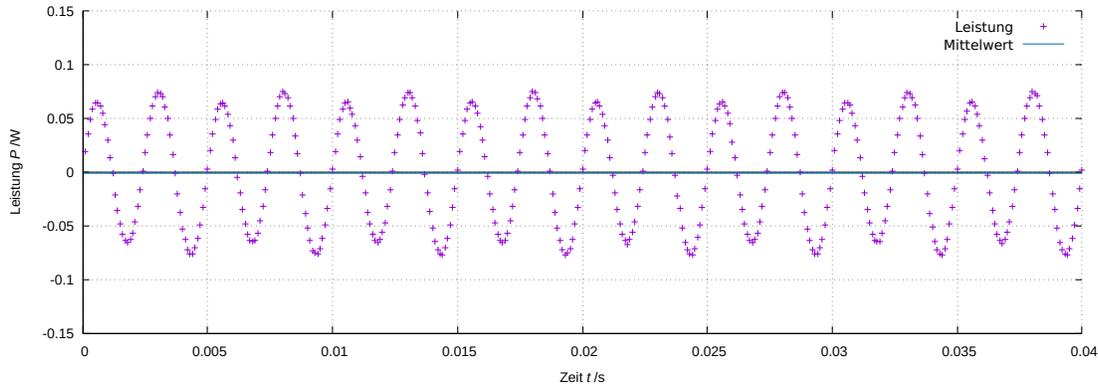


Abb. 4.3: Wechselstromleistung am Kondensator

Das Produkt aus Spannung und Stromstärke ergibt eine Sinusfunktion mit der doppelten Frequenz der Ausgangsspannung.

$$P(t) = \hat{U} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{2}) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot f) \cdot t) = \hat{P} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Die Flächen zwischen Messkurve - tatsächlich handelt es sich um ein kontinuierlichen Ablauf - und der t-Achse stellen Energiebeträge dar. Der Kondensator nimmt also Energie auf und speichert sie (positiver Funktionswert) und gibt sie anschließend wieder ab (negativer Funktionswert). Die Energiespeicherung findet im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten und im Polarisationsfeld des Dielektrikums statt.

Der Mittelwert der Leistung \bar{P} ist null. Dies ergibt sich auch in unserem, rein experimentell erarbeiteten Fall. Dieses Ergebnis gilt allgemein für jeden Kondensator und für jede Frequenz. Der Kondensator ist ein Energiespeicher, der aus der Wechselspannungsschaltung Energie aufnimmt $P(0 \leq t < \frac{T}{4}) > 0$ und sie im nächsten Moment wieder abgibt $P(\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2}) < 0$ und das mit der Frequenz $f = \frac{2}{T}$.

Trotz völlig unterschiedlichen Verhaltens ist die Leistungsbilanz eines Kondensators im Wechselstromkreis über einen größeren Zeitraum gleich wie im Gleichstromkreis, nämlich null.

4.2.1 Zusammenfassung

Für den Kondensator im Wechselstromkreis gilt:

1. Er wirkt als Leiter mit dem Widerstand $X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$.
2. Die Stromstärke eilt der Spannung um $\frac{T}{4}$ voraus, das entspricht einem Phasenwinkel φ von 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$. Der Kondensator wirkt als "Phasenschieber" zwischen Stromstärke und Spannung.
3. Für die Leistung gilt: $P_C(t) = \hat{P}_C \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$. Ihr Mittelwert ist null: $\bar{P}_C = 0$.

4.3 Der Wechselstromwiderstand des Kondensators

4.3.1 Frequenzabhängigkeit des kapazitiven Widerstandes bei konstanter Kapazität

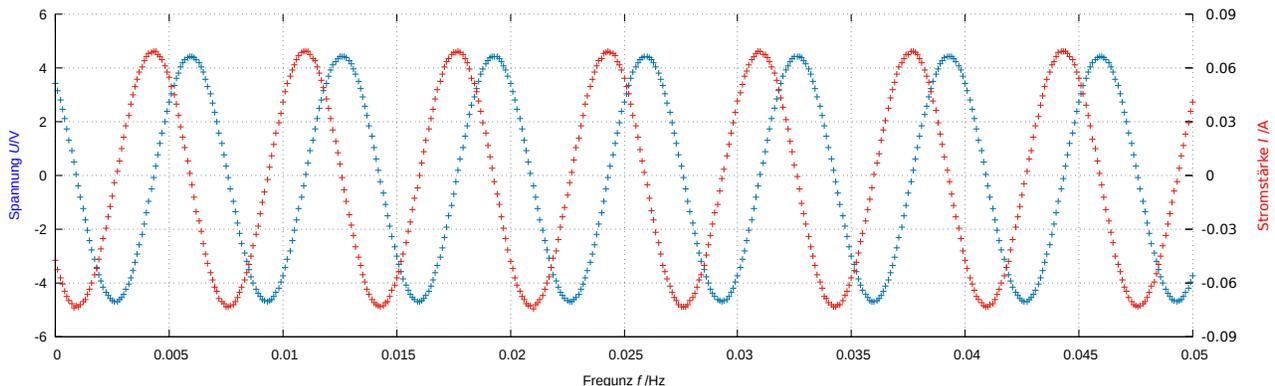


Abb. 4.4: Strom- und Spannungsverlauf bei einem Kondensator mit $C = 16 \mu\text{F}$ bei $f = 150 \text{ Hz}$

In Abb. 4.4 ist der Strom- und Spannungsverlauf eines Kondensators mit der Kapazität $C = 16 \mu\text{F}$ und der Frequenz $f = 150\text{Hz}$ dargestellt. Die Messfrequenz beträgt 10000 Punkte pro Sekunde. Es handelt sich um die tatsächlichen Messpunkte, ohne Interpolation. Aus dieser Grafik lassen sich \hat{U} und \hat{I} ablesen und damit der Widerstand $X_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ bestimmen. Meine Auswertung ergibt $X_C = 64,7\Omega$.

In der nachfolgenden Abbildung 4.5 sind Strom- und Spannungsverlauf am gleichen Kondensator unter gleichen Bedingungen wie in Abb. 10, aber bei doppelter Frequenz. Der Widerstand ist nach demselben Verfahren wie oben zu bestimmen. Mein Wert ist $33,2 \Omega$. Die Frequenzen lassen sich ohne weiteres auch aus den Diagrammen entnehmen. Der Vergleich beider Widerstandswerte legt die Vermutung nahe, dass Frequenz und Widerstand bei gleicher Kapazität umgekehrt proportional zueinander sein könnten.

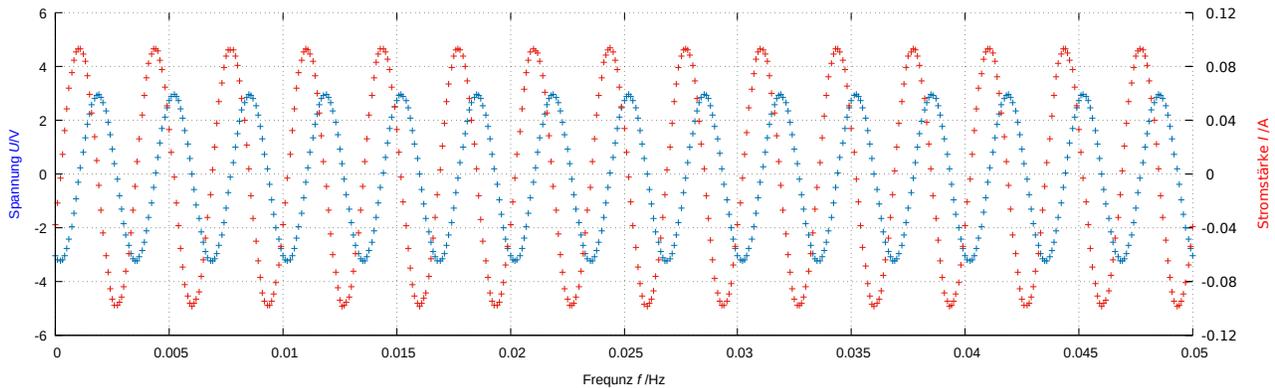


Abb. 4.5; Strom- und Spannungsverlauf bei einem Kondensator mit $C = 16 \mu\text{F}$ bei $f = 300 \text{ Hz}$

Zur Bestätigung habe ich nach diesem Verfahren die Widerstände der Kondensatoren mit den Kapazitäten $220 \mu\text{F}$, $100 \mu\text{F}$, $50 \mu\text{F}$, $16 \mu\text{F}$ und $4 \mu\text{F}$ (jeweils Aufdruck) in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Das Ergebnis der

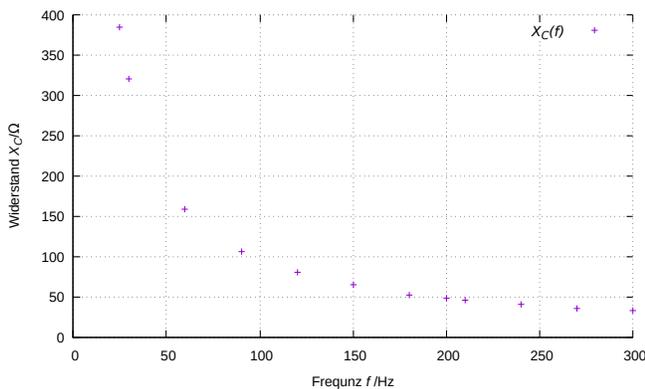


Abb. 4.6: $C = 16 \mu\text{F}$, $X_C(f)$, Messpunkte

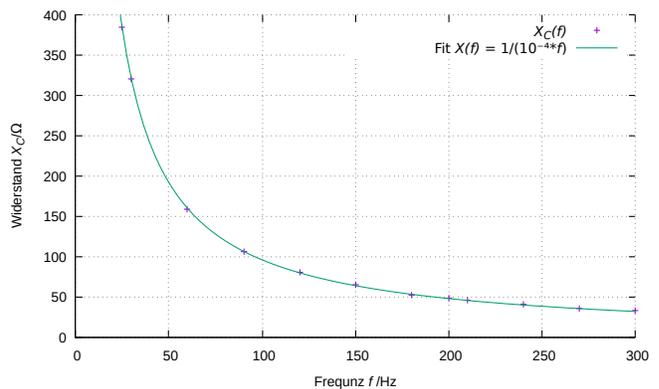


Abb. 4.7: $C = 16 \mu\text{F}$, $X_C(f)$, Messpunkte mit Fit

Messpunkte für den Kondensator $C = 16\mu\text{F}$ ist in Abb. 4.6 dargestellt. Abb. 4.7 enthält zusätzlich den Fit $f(x) = \frac{a}{x}$. Dieser deckt sich sehr genau mit den gemessenen Punkten, so dass der Zusammenhang $X_C \sim \frac{1}{f}$ unmittelbar ersichtlich ist.

Eine weitere Methode zur Bestimmung der Frequenzabhängigkeit des Wechselstromwiderstandes eines Kondensators habe ich mit einem Kondensator mit $C = 4700 \mu\text{F}$ durchgeführt. Die Größe der Kapazität hat zur Folge, dass sein Widerstand auch bei kleinen Frequenzen (zwischen $0,2 \text{ Hz}$ und $1,0 \text{ Hz}$) mit meinem Messsystem schon gut messbar war. Während der Verfolgung der Entstehung der Spannungs- und Strompunkte in Echtzeit habe ich nach jeder vollen Schwingung die Frequenz um $0,1 \text{ Hz}$ erhöht, so dass ich innerhalb von 20 s eine frequenzabhängige Punktefolge erhielt.

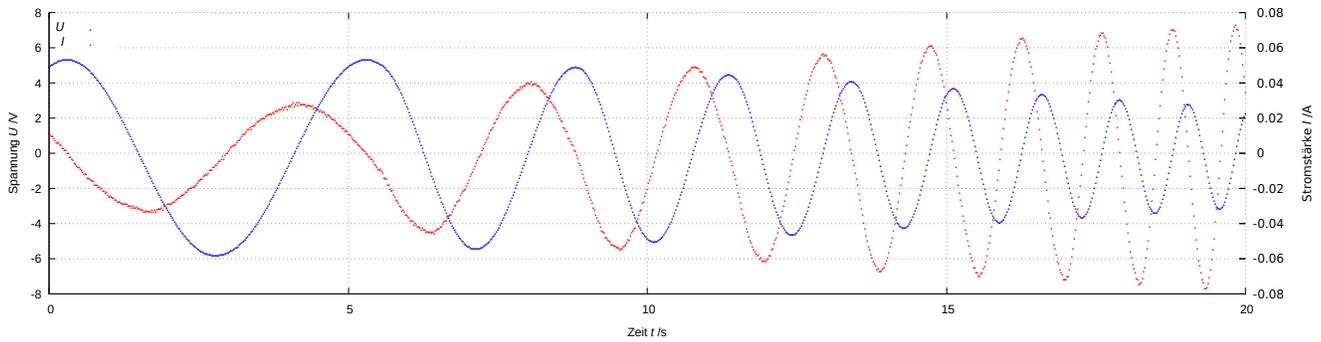


Abb. 4.8: Messpunkte für Spannung und Strom bei veränderlicher Frequenz

Die grafische Auswertung erlaubt es, für jede Frequenz ein \hat{U} und ein \hat{I} abzulesen und so den Widerstand zu bestimmen. Meine Werte sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

f/Hz	\hat{U}/V	\hat{I}/A	X_C/Ω
0,2	5,631	0,0315	179
0,3	5,242	0,0402	130
0,4	4,852	0,0527	92,1
0,5	4,446	0,0595	74,7
0,6	4,040	0,0649	62,2
0,7	3,735	0,0679	55,0
0,8	3,464	0,0699	49,6
0,9	3,210	0,0724	44,3
1,0	2,956	0,0746	39,6

Tab. 2: Zusammenhang zwischen Frequenz und Widerstand

In der grafischen Darstellung erhält man dann Abbildung 4.9

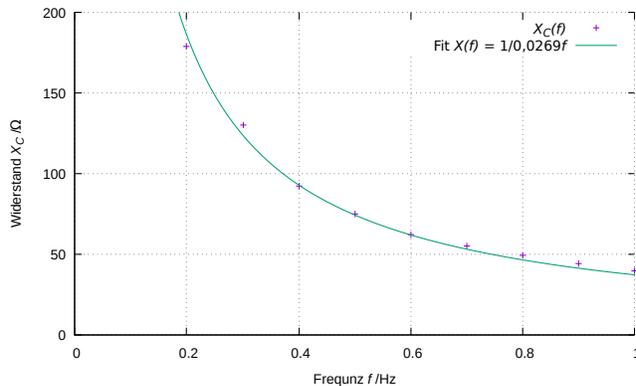


Abb. 4.9: $X_C(f)$, Messpunkte für $C = 4,7 \text{ mF}$ mit Fit

Auch dieses Ergebnis ist - insbesondere in Anbetracht der Methode - durchaus aussagekräftig und diskussionsfähig.

4.3.2 Kapazitätsabhängigkeit des kapazitiven Widerstandes bei konstanter Frequenz

Als Kondensatoren standen mir die Kapazitäten $16 \mu\text{F}$, $50 \mu\text{F}$, $100 \mu\text{F}$ und $220 \mu\text{F}$ zur Verfügung. Die Frequenz der Wechselspannung habe ich mit 25 Hz festgelegt. Nach dem gleichen Messverfahren wie unter 5.4.1 beschrieben ermittelte ich die Widerstände zu

$$X_{25}(16\mu\text{F}) = 384\Omega, X_{25}(50\mu\text{F}) = 100\Omega, X_{25}(100\mu\text{F}) = 52,7\Omega \text{ und } X_{25}(220\mu\text{F}) = 29,2\Omega.$$

Die daraus resultierende Grafik ist in Abb. 4.10 dargestellt.

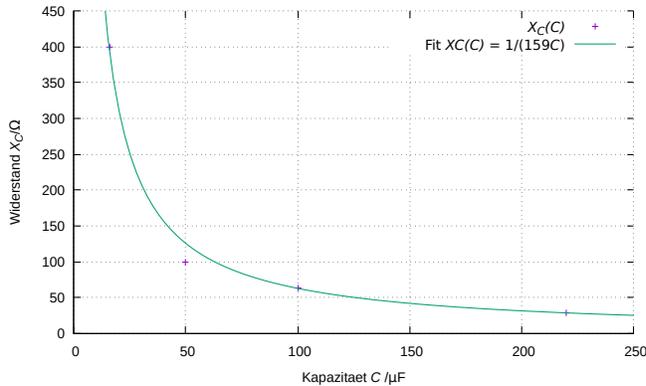


Abb. 4.10: $X_f(C)$, Messpunkte mit Fit.

4.3.3 Zusammenfassung

In der Zusammenfassung aus 5.4.1 und 5.4.2 ergibt sich für den Zusammenhang zwischen kapazitivem Widerstand und Frequenz und Kapazität die Beziehung: $X_C(f) = \frac{1}{\text{konst.} \cdot f \cdot C}$. Durch Auswertung der Abbildungen 4.7, 4.9 und 4.10 können wir diese Konstante jeweils unabhängig voneinander berechnen:

1. Nach Abb. 4.7 gilt: $\text{konst.} \cdot f \cdot C = 0,0001 \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot f$. Mit $C = 16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}$ ergibt sich daraus $\text{konst.} = 6,25$
2. Nach Abb. 4.9 gilt: $\text{konst.} \cdot f \cdot C = 0,0269 \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot f$. Mit $C = 4,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{As}}{\text{V}}$ ergibt sich daraus $\text{konst.} = 5,72$; Die Kapazität dieses Kondensators wurde im Rahmen des Abschnitts "Ladung - Entladung von Kondensatoren mit $C = 4,53 \cdot 10^{-3} \frac{\text{As}}{\text{V}}$ experimentell bestimmt. Mit diesem - wahrscheinlich genaueren - Wert ergibt sich für die Konstante $\text{konst} = 5,94$
3. Nach Abb. 4.10 gilt: $\text{konst.} \cdot f \cdot C = 159 \cdot C$. Mit $f = 25\text{Hz}$ ergibt sich daraus $\text{konst.} = 6,36$

Nun muss noch die Konstante konst. als 2π erkannt werden, so dass sich die endgültige Beziehung ergibt: $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$.

5 Spule

Eine Spule besteht aus Leiterdraht, der in übereinander liegenden Schleifen angeordnet ist. Dieser Draht besitzt einen bestimmten Ohmschen Widerstand R_L , der von Material, Länge und der Querschnittsfläche des Drahtes abhängt. Wird an eine Spule Gleichspannung gelegt, so begrenzt R_L die Stromstärke und es gilt $U = I \cdot R_L$. Allerdings verhält sich die Spule in Ein- und Ausschaltsituationen völlig anders. dies ist im entsprechenden Teil genauer ausgeführt.

Wie im Falle des Kondensators wirkt sich auch bei der Spule eine Wechselspannung wie eine permanente Ein- Ausschaltsituation aus, so dass hier weitere Gesichtspunkte hinzukommen. Entscheidend für das Verhalten beider Bauteile ist die Fähigkeit, mit großer Geschwindigkeit Energie zu Speichern und wieder abzugeben. Beim Kondensator im elektrischen Feld und im Polarisationsfeld, bei der Spule im Magnetfeld und der Magnetisierung von Materialien (z.B. Eisen).

5.1 Spule im Wechselstromkreis

Analog zum Kondensator beginnen wir mit der Messung von Spannungs- und Stromverlauf bei einer Spule im Wechselstromkreis.

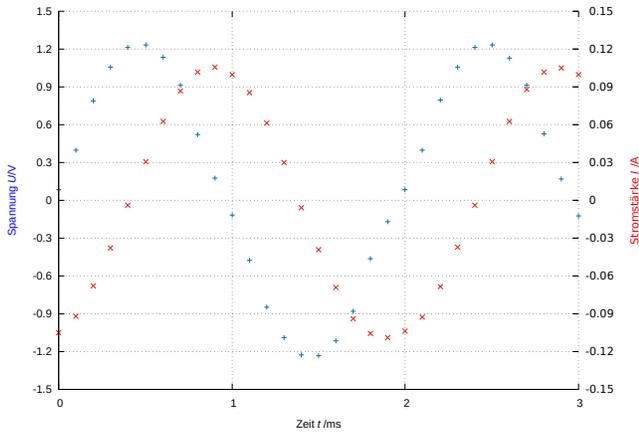


Abb. 5.1: $U(t)$ und $I(t)$, Messpunkte

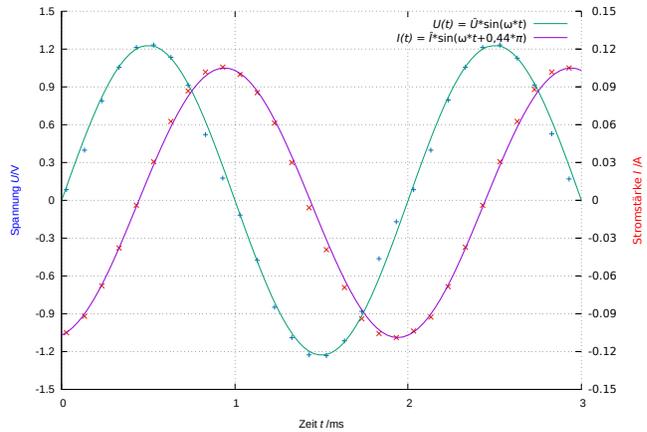


Abb. 5.2: Fit mit $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $I = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t - 0,4\pi)$

Die Punktmarkierungen stellen die Messwerte dar, die Linien die gefitteten Kurven. Die Spule besitzt eine Induktivität von $L = 3,3 \text{ mH}$ und einen Ohmschen Widerstand von $0,5 \Omega$.

Bei der Spule eilt die Spannung der Stromstärke voraus. Bei einer idealen Spule, d.h. einer Spule, deren Ohmscher Widerstand verschwindet, eilt die Spannung der Stromstärke um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ voraus. Im vorliegenden Versuch beträgt dieser Wert $0,44\pi$. Wenn wir zunächst von der Idealen Spule ausgehen, sieht das dazugehörige Zeigerdiagramm wie folgt aus:

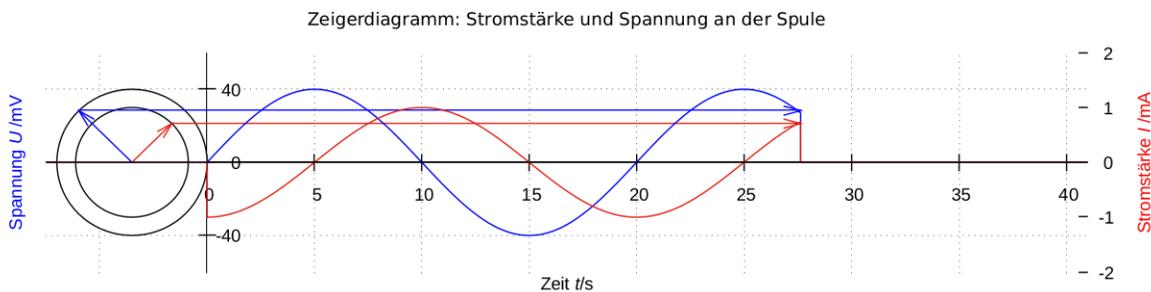


Abb. 5.3 Zeigerdiagramm für $U(t)$ und $I(t)$ einer idealen Spule

5.2 Leistungsumsatz der stromdurchflossenen Spule

Analog zum Vorgehen beim Kondensator betrachten wir eine Spule und ihr $U(t)$ - $I(t)$ Schaubild

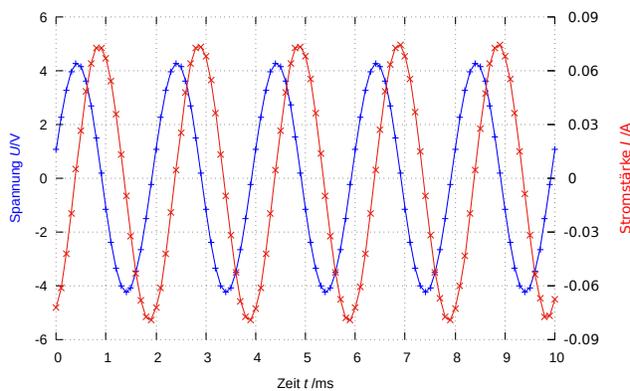


Abb. 5.4: $U(t)$ und $I(t)$ bei einer Spule von $16,5 \text{ mH}$ bei 500 Hz

Aus den Messpunkten wird nun für jeden Messzeitpunkt das Produkt aus $U(t)$ und $I(t)$ gebildet und in der Grafik $P(t)$ abgetragen:

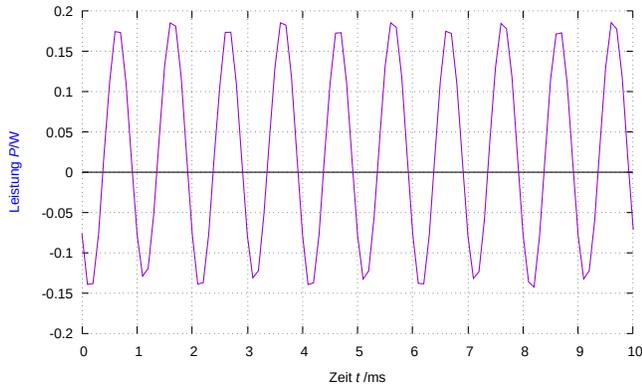


Abb. 5.6: Leistungsumsatz an der Spule

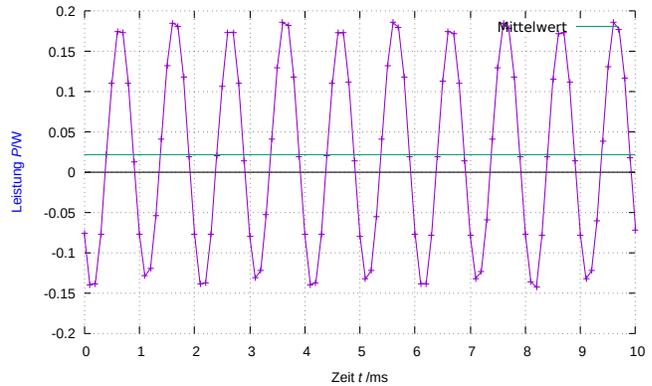


Abb. 5.7: Leistungsumsatz an der Spule mit Mittelwert

Wie beim Kondensator, so oszilliert auch bei der Spule die Momentanleistung einer Wechselspannung in Sinusform um die Zeitachse. In meinem Experiment liegt der Mittelwert (grüne Linie in Abb. 5.7) im positiven Bereich bei 0,022 W. Das liegt daran, dass bei der Spule immer ein Ohmscher Widerstand beteiligt ist und zusätzlich das Magnetfeld systembedingt zu einem größeren Verlust führt.

Das Ergebnis kann Ausgangspunkt intensiver Diskussionen über den Unterschied des Wirkungsmechanismus von magnetischen - insbesondere ferromagnetischen - und dielektrischen Materialien sein. Je nach Tiefgang können nahezu alle Teilgebiete der Physik zu solchen "Materialdiskussionen" herangezogen werden.

Solche unvermuteten Exkursionen sind für viele Schüler und Schülerinnen eindrucksvoller, als "Einführungen" in ein Thema, von dem der Lehrer ein klares Bild vor Augen hat, die Schüler und Schülerinnen aber bestenfalls vage Vorstellungen.

5.3 Der Wechselstromwiderstand der Spule

Eine Spule besteht aus einem Leitungsdraht der Länge λ . Sie hat also systembedingt einen Ohmschen Widerstand $R = \varrho \cdot \frac{\lambda}{A}$, wobei ϱ der spezifische Widerstand und A die Querschnittsfläche des Leitungsdrahtes ist. Im Gleichstromkreis verhält sich eine Spule wie ein Ohmscher Widerstand R . Wird der Gleichstrom durch Wechselstrom ersetzt, kommt zum Ohmschen Anteil des Widerstandes ein induktiver Anteil X_L dazu, der von der Frequenz und der Eigenschaft der Spule, der Eigeninduktivität L abhängt. Zur Vereinfachung der Verhältnisse gehe ich zunächst von einer "idealen" Spule aus, darunter verstehe ich eine Spule, für die gilt: $R \ll X_L$ und vernachlässige dann den Ohmschen Widerstand.

5.3.1 Frequenzabhängigkeit des induktiven Widerstandes bei konstanter Induktivität

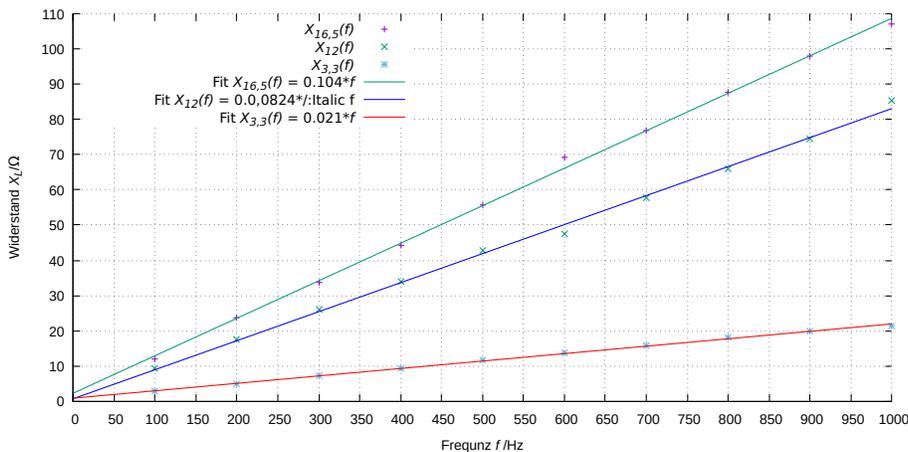


Abb. 5.8: Induktiver Widerstand verschiedener Spulen in Abhängigkeit von der Frequenz

In Abb. 5.8 sind die Messwerte für den induktiven Widerstand in Abhängigkeit von der Frequenz bei drei Spulen mit den Eigeninduktivitäten $L_1 = 16,5$ mH, $L_2 = 12$ mH und $L_3 = 3$ mH aufgetragen. Zusätzlich wurden die Ausgleichsgeraden berechnet und mit eingetragen.

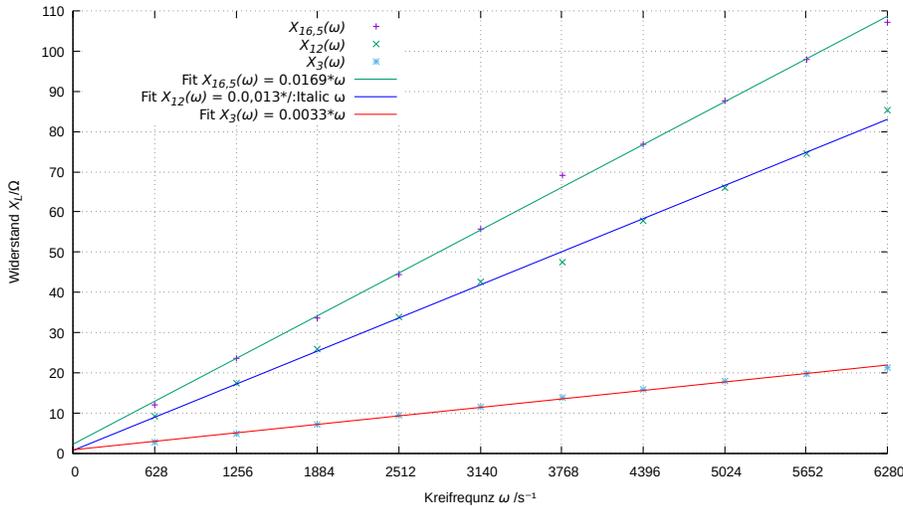


Abb. 5.9: Wie Abb. 21, aber X_L über ω aufgetragen.

Damit lässt sich das Ergebnis dieser Messungen zusammenfassen: $X_L \sim \omega|_{L=\text{konst.}}$. Ein Vergleich der Eigeninduktivitäten mit den Steigungen der Geraden zeigt im Rahmen der Messgenauigkeit gleiche Werte. Damit liegt die Vermutung nahe: $X_L = \omega \cdot L$.

5.3.2 Abhängigkeit des induktiven Widerstandes von der Eigeninduktivität einer Spule bei konstanter Frequenz

Die im vorigen Abschnitt schon vermutete Tatsache ist durch Auswertung der Daten leicht zu bestätigen.

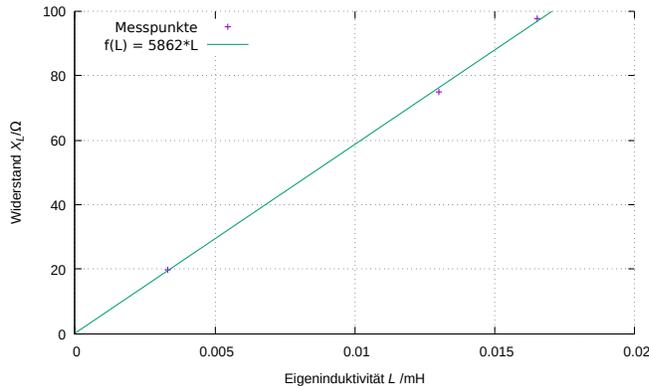


Abb. 5.10: Induktiver Widerstand in Abhängigkeit von der Eigeninduktivität

Abb. 5.10 zeigt die Proportionalität zwischen dem induktiven Widerstand und der Eigeninduktivität einer Spule. Die Messergebnisse weichen von den theoretischen Werten deutlich stärker ab (ca. 7 %), als bei den Versuchen mit Kondensatoren, obwohl die eingesetzten Spulen nur Ohmsche Widerstände zwischen $0,5 \Omega$ und 1Ω hatten. Das zeigt, dass bei Spulen andere Effekte, teils materialbedingt (z.B. Wirbelströme, Magnetisierung, ...), teils bauartbedingt (z.B. Strahlungseffekte), eine deutlich größere Rolle spielen, als bei Kondensatoren.

Trotzdem lässt sich das Ergebnis $X_L \sim L|_{f=\text{konst}}$ festhalten, so dass in der Zusammenfassung das Ergebnis meines experimentellen Ansatzes lautet: $X_L = \omega \cdot L$.

6 Wechselstromwiderstände in Reihen- und Parallelschaltungen

In den vorherigen Abschnitten habe ich drei unterschiedliche Widerstandselemente dargestellt, die sich im Wechselstromkreis sehr unterschiedlich verhalten:

1. Der Ohmsche Widerstand R ist frequenzunabhängig und verursacht keine Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung. Im Zeigerdiagramm stellt sich dieser Sachverhalt so dar:

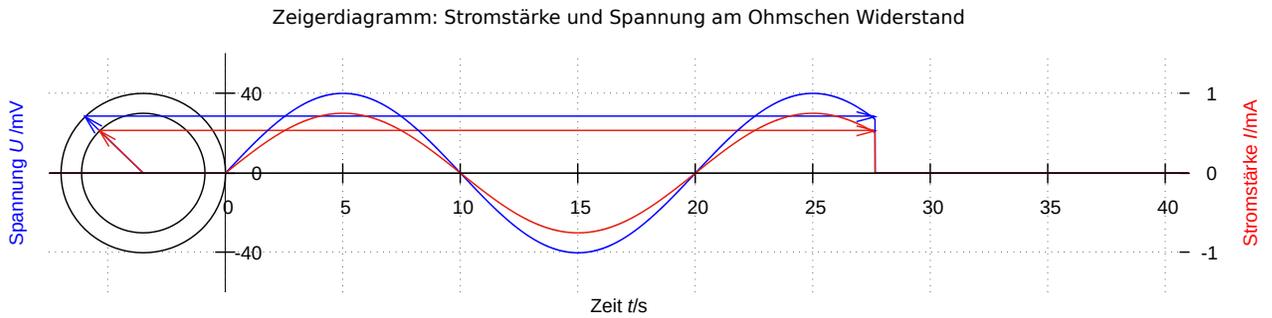


Abb. 6.1: Zeigerdiagramm eines Ohmschen Widerstandes

2. Der kapazitive Widerstand X_C ist frequenzabhängig: $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ und verursacht eine Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung von $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Stromstärke eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus:

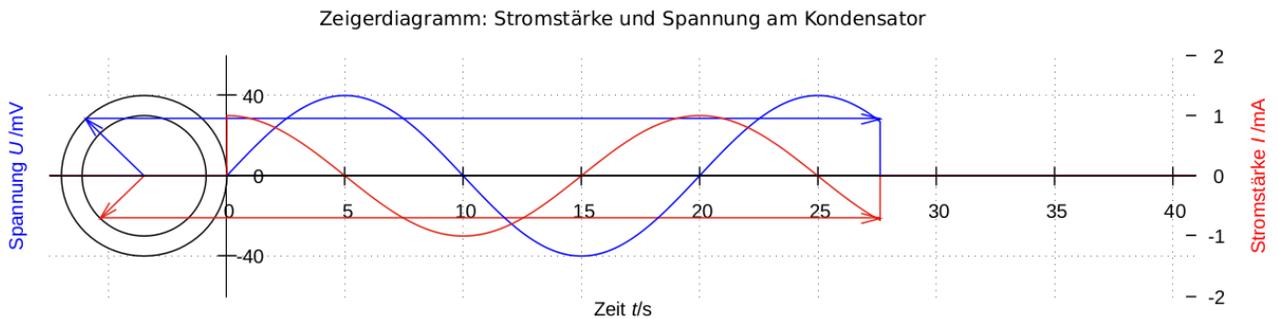


Abb. 6.2: Zeigerdiagramm eines kapazitiven Widerstandes

3. Der induktive Widerstand X_L ist ebenfalls frequenzabhängig: $X_L = \omega \cdot L$ und verursacht eine Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Die Spannung eilt der Stromstärke um $\frac{\pi}{2}$ voraus:

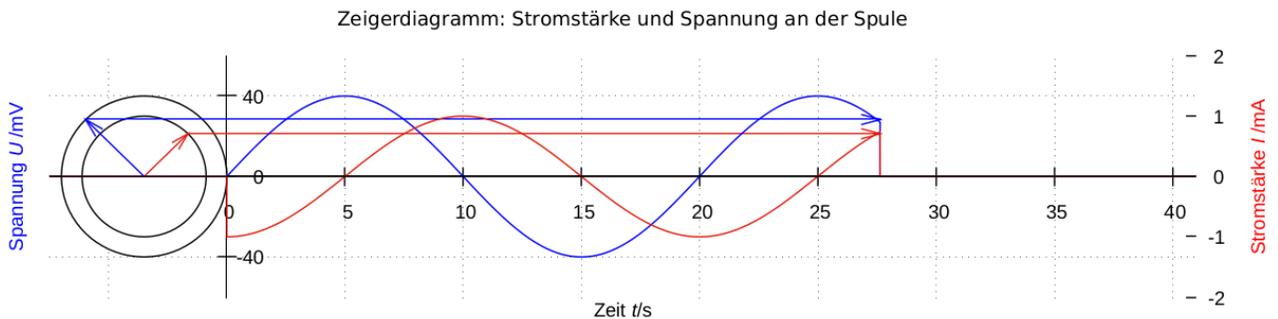


Abb. 6.3: Zeigerdiagramm eines induktiven Widerstandes

4. Bei Kombinationen von verschiedenen Widerständen entsteht eine Phasenverschiebung φ zwischen Stromstärke und Spannung. Der Wertebereich von φ liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ (nur ideale Spulen) und $-\frac{\pi}{2}$ (nur ideale Kondensatoren).

6.1 Reihenschaltung

6.1.1 Reihenschaltung eines Ohmschen- und eines kapazitiven Widerstandes

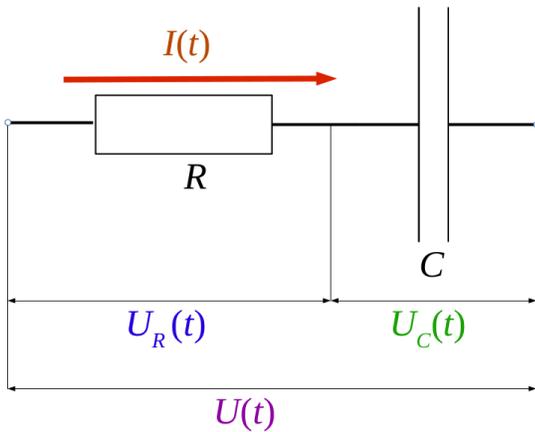


Abb. 6.4: Schaltbild Reihenschaltung

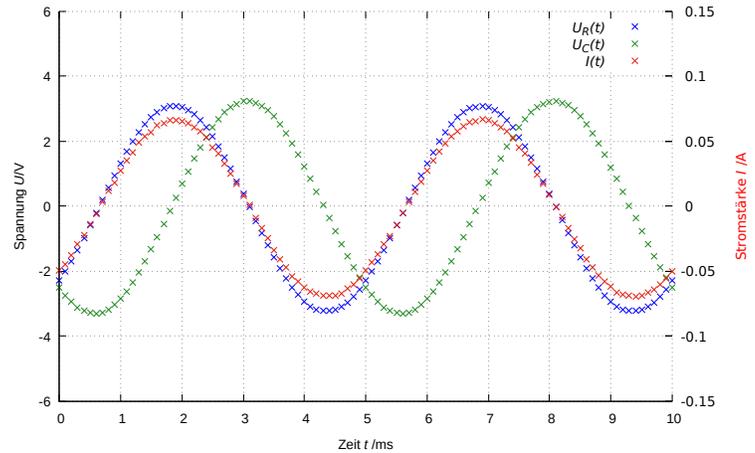


Abb. 6.5: rot: $I(t)$, blau: $U_R(t)$; grün: $U_C(t)$

Abb. 6.4 zeigt das Schaltbild der Reihenschaltung aus dem Ohmschen Widerstand $R=45\ \Omega$ und dem Kondensator $C=16\ \mu\text{F}$. Die Frequenz der Wechselspannung beträgt $200\ \text{Hz}$. Die Stromstärke ist, wie immer bei Reihenschaltung im Ohmschen und im kapazitiven Widerstand zu jedem Zeitpunkt gleich. In Abb. 6.5 ist der zeitliche Verlauf der Stromstärke durch die roten Messpunkte dargestellt. Die Spannung am Ohmschen Widerstand ist durch die blauen Punkte gegeben. Auch im Falle der Reihenschaltung sind Stromstärke und Spannung am Ohmschen Widerstand phasengleich. Diese Tatsache gilt für alle Schaltungen und ist für das Verständnis der Verhältnisse von entscheidender Bedeutung.

Die grünen Punkte stellen den zeitlichen Spannungsverlauf am Kondensator dar. Wie schon im vorigen Abschnitt erkannt, entsteht zwischen Spannung und Stromstärke eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$. Die Stromstärke eilt der Spannung um diese Phase voraus.

Das Ergebnis der Messung ergibt folgende Zahlenwerte (abgelesen): $\hat{U}_R = 3,15\ \text{V}$; $\hat{U}_C = 3,27\ \text{V}$; $\hat{U} = 4,55\ \text{V}$; $\hat{I} = 0,0675\ \text{A}$; Der aus den Teilspannungen \hat{U}_R und \hat{U}_C berechnete Wert der Gesamtspannung beträgt $\hat{U} = 4,62\ \text{V}$ (s. u.). Das Maximum der Stromstärke wird zum Zeitpunkt $t = 1,83\ \text{ms}$ erreicht. Zu diesem Zeitpunkt beträgt $U_C(t) = 0$.

Abb. 6.6 veranschaulicht den Zeitpunkt $t = 1,83\ \text{ms}$ der Phasen- und Amplitudenbeziehungen von Abb. 6.5. Zu dem gewählten Zeitpunkt sind die Spannung am Ohmschen Widerstand und die Stromstärke maximal. Die Spannung am Kondensator ist zu diesem Zeitpunkt Null und steigt. Die Drehrichtung des feststehenden Zeigersystems ist wie schon in früheren Darstellungen entgegen dem Uhrzeigersinn festgelegt.

Aus den gemessenen Daten lassen sich die Widerstände $R = \frac{\hat{U}_R}{\hat{I}}$ und $X_C = \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}}$ berechnen.

Die Fragestellung, die uns nun beschäftigt, lautet: Welche Beziehung besteht zwischen dem Gesamtwiderstand $Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ und den Teilwiderständen R und X_C ? Eine einfache Addition scheidet aus, da offensichtlich ist, dass dazu für die Scheitelwerte $\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_C$ gelten müsste, was angesichts der Phasenverschiebung zwischen \hat{U}_R und \hat{U}_C nicht der Fall ist.

Zu addieren sind nicht die Scheitelwerte, sondern die Zeitfunktionen und es gilt: $U(t) = U_R(t) + U_C(t)$. In Abb. 6.7 sind die gemessenen Zeitfunktionen interpoliert dargestellt.

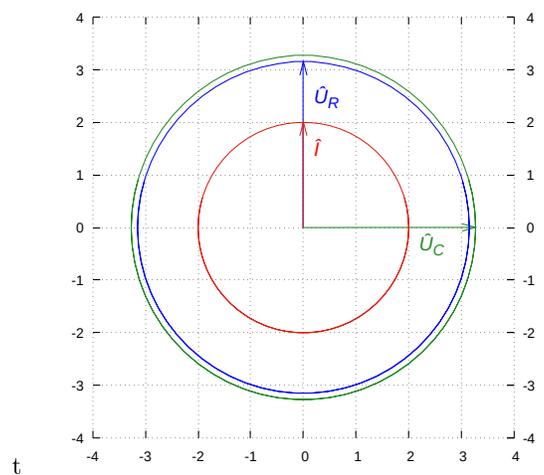


Abb. 6.6: Zeigerdiagramm zu Abb. 6.4 und Abb. 6.5 $t = 1,83\ \text{ms}$

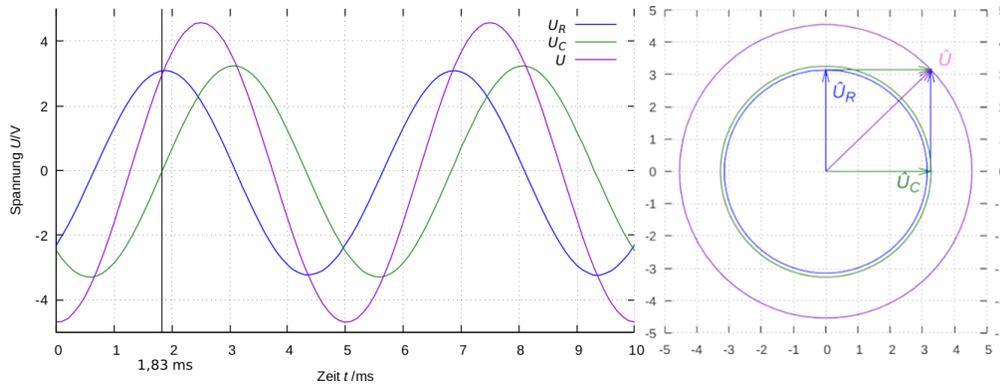


Abb. 6.7: Spannungsverlauf Gesamtspannung $U(t)$ (violett), $U_R(t)$ (blau) und $U_C(t)$ (grün); daneben Zeigerdiagramm desselben Vorgangs zum Zeitpunkt $t_1 = 1,83$ ms. Man beachte: Es gilt: $U_R(t_1) = U(t_1) = \hat{U}_R$ und weiter $U_C(t_1) = 0$.

Abb. 6.7 ist aus dem gleichen Datensatz erstellt, wie Abb. 6.5. Die Stromstärkekurve $I(t)$ ist nicht mehr eingezeichnet, weil sie für das Zeigerdiagramm keine zusätzliche Information enthält, da sie dort als zu U_R paralleler Zeiger auftritt. Zusätzlich ist hier die Gesamtspannung $U(t)$ dargestellt. Das mithilfe der Messdaten entstandene Zeigerdiagramm zeigt die Methode im Umgang mit den Phasenverschiebungen: die Pfeile lassen sich wie Vektoren addieren. Das heißt, das Zeigerdiagramm eröffnet eine graphische Möglichkeit zur Addition von Winkelfunktionen mit beliebigen Amplituden und Phasenverschiebungen. Die Pfeile müssen nur in der vorgegebenen Länge (Amplitude) und im richtigen Winkel zueinander eingezeichnet werden, um den Summenpfeil und damit die Konstruktion der resultierenden Kurve zu bestimmen. Aus der grafischen Darstellung ist zu entnehmen, dass der Scheitelwert \hat{U} der resultierenden Spannung $U(t)$ nach Pythagoras zu berechnen ist: $\hat{U} = \sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2}$. Daraus lässt sich der Wechselstromwiderstand Z berechnen: $Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\sqrt{\hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2}}{\hat{I}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_R^2}{\hat{I}^2} + \frac{\hat{U}_C^2}{\hat{I}^2}} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$.

Die Beziehungen zur Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen Stromstärke $I(t)$ und Spannung $U(t)$ ist aus dem Zeigerdiagramm zu entnehmen: $\tan(\varphi) = \frac{-\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{-\hat{U}_C \cdot \hat{I}}{\hat{U}_R \cdot \hat{I}} = \frac{-X_C}{R} = \frac{-1}{R \cdot \omega \cdot C}$

Ergebnis: Aus den Messdaten konnte der Zusammenhang zwischen den in Reihe geschalteten Wechselstromwiderständen R , X_C und dem resultierenden Widerstand Z , sowie die Phasenverschiebung φ bestimmt werden.

Bei Reihenschaltung von Ohmschem und kapazitiven Widerstand im Wechselstromkreis gilt:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{-\hat{U}_C \cdot \hat{I}}{\hat{U}_R \cdot \hat{I}} = \frac{-X_C}{R} = \frac{-1}{R \cdot \omega \cdot C}$$

6.1.2 Reihenschaltung von Ohmschem- und induktivem Widerstand

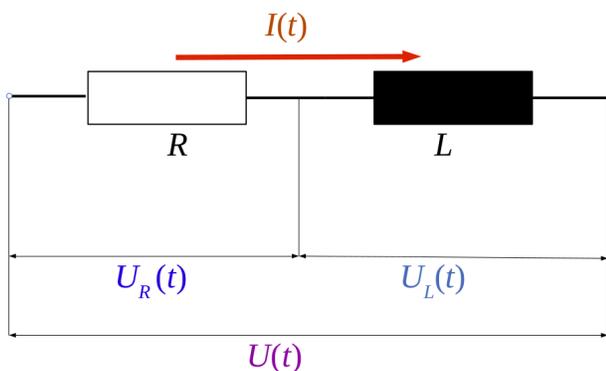


Abb. 6.8 : Schaltbild Reihenschaltung

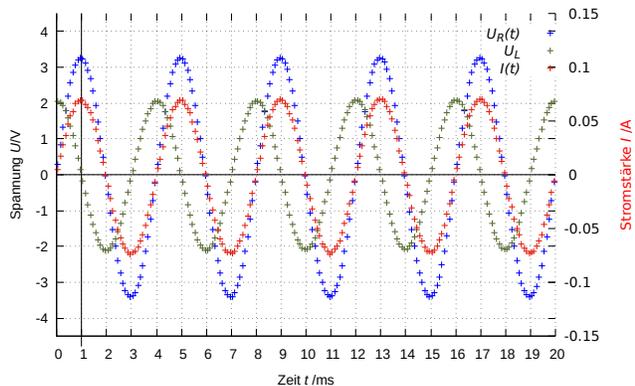


Abb. 6.9: rot: $I(t)$, blau: $U_R(t)$, dunkelgrün: $U_L(t)$

Abb. 6.8 zeigt die Reihenschaltung. Meine Bauelemente hatten folgende Daten: $R = 45 \Omega$, $L = 19$ mH. Die vier in der Schaltskizze angegebenen Zeitfunktionen $I(t)$, $U_R(t)$, $U_L(t)$ und $U(t)$ wurden synchron gemessen. Die Linie

bei $t = 1$ ms markiert die Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung. Wie unter 6.1 sind $I(t)$ und $U_R(t)$ phasengleich, während $U_L(t)$ der Stromstärke und damit auch der Spannung am Ohmschen Widerstand um $\frac{\pi}{2}$ voraus eilt.

Messergebnisse: $\hat{U}_R = 3,32\text{V}$; $\hat{U}_L = 2,10\text{V}$; $\hat{U} = 4,04\text{V}$; Berechnete Gesamtspannung: $\hat{U} = 3,93\text{V}$.

Die Spannungsverhältnisse der Schaltung stellen sich in Analogie zu Abb. 6.7 folgendermaßen graphisch dar:

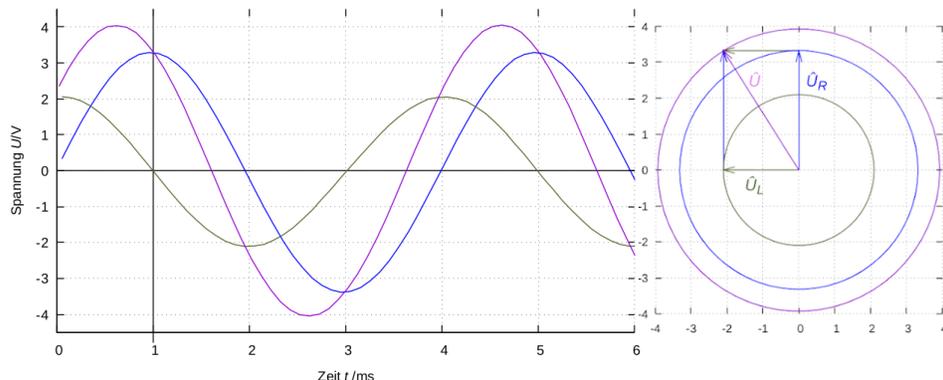


Abb. 6.10: $U(t)$ violett, $U_R(t)$ blau und $U_L(t)$ dunkelgrün; daneben das Zeigerdiagramm desselben Vorganges zum Zeitpunkt $t_1 = 1,0\text{ms}$. Man beachte: Es gilt: $U_R(t_1) = U(t_1) = \hat{U}_R$ und weiter $U_L(t_1) = 0$

Die Abweichung zwischen Messung (Kurve) und Rechnung (Kreisdiagramm) in der Amplitude der Gesamtspannung ist eine Folge der Diskrepanz zwischen realer und idealer Spule. In diesem Punkt unterscheiden sich Versuche mit Kondensatoren und mit Spulen in eklatanter Weise. Während mit Kondensatoren sehr gute Ergebnisse leicht zu erreichen sind (s.o.), ist bei Spulen deutlich mehr Aufwand bei der Auswahl der Komponenten und in der Vorbereitung der Experimente nötig.

In Analogie zur Betrachtung in Abschnitt 6.1.1 folgt: Gesamtwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ und $\tan(\varphi) = \frac{X_L}{R}$.

Bei Reihenschaltung von Ohmschem und induktivem Widerstand im Wechselstromkreis gilt:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

6.1.3 Reihenschaltung von Ohmschem, kapazitivem und induktivem Widerstand im Wechselstromkreis

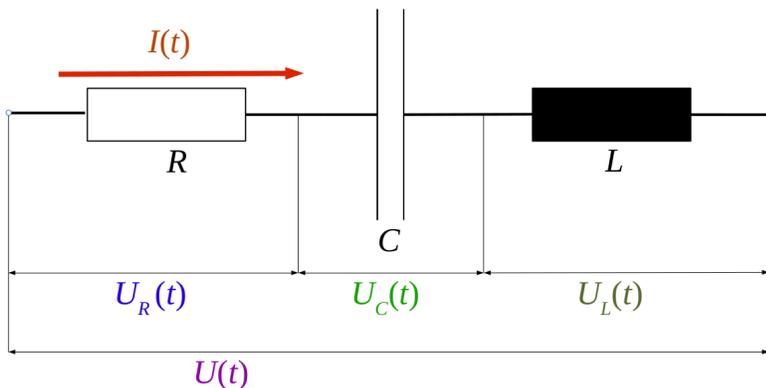


Abb. 6.11: Schaltplan Reihenschaltung

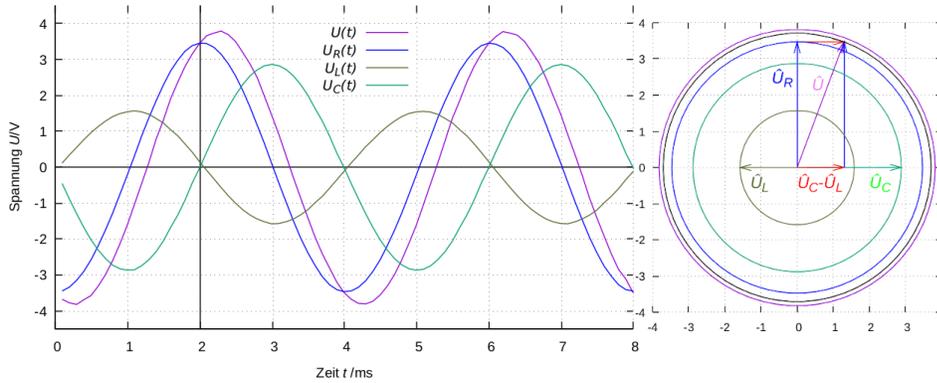


Abb. 6.12: s-t-Diagramm und Zeigerdiagramm zum Zeitpunkt $t = 2$ ms; schwarzer Kreis: \hat{U}_{th} ; violetter Kreis: \hat{U}_{ex}

Ausgangsdaten zu Abb. 6.12: $R = 47\Omega$; $L = 13,6\text{mH}$; $C = 16\mu\text{F}$; $f = 250\text{Hz}$; Ergebnisse, experimentell: $\hat{U}_{ex} = 3,82\text{V}$; $\hat{U}_R = 3,47\text{V}$; $\hat{U}_L = 1,58\text{V}$ und $\hat{U}_C = 2,88\text{V}$. Aus den Daten von \hat{U}_R , \hat{U}_L , sowie \hat{U}_C lässt sich nach Pythagoras ein theoretischer Wert für \hat{U} berechnen: $\hat{U}_{th} = 3,71\text{V}$. Im Zeigerdiagramm sind beide Werte für \hat{U} eingezeichnet: \hat{U}_{th} als schwarzer Kreis und \hat{U}_{ex} als violetter Kreis. Der violette Zeiger \hat{U} weist auf den schwarzen Kreis.

Die Begründung für die Abweichung der Ergebnisse ist auch den $U(t)$ -Diagrammen zu entnehmen: Die Nulldurchgänge von $U_L(t)$ und $U_C(t)$ müssten zum selben Zeitpunkt stattfinden, sind aber um $\Delta t = 0,055$ ms gegeneinander verschoben, was einer Winkelverschiebung von $\Delta\alpha = 4,95^\circ$ entspricht.

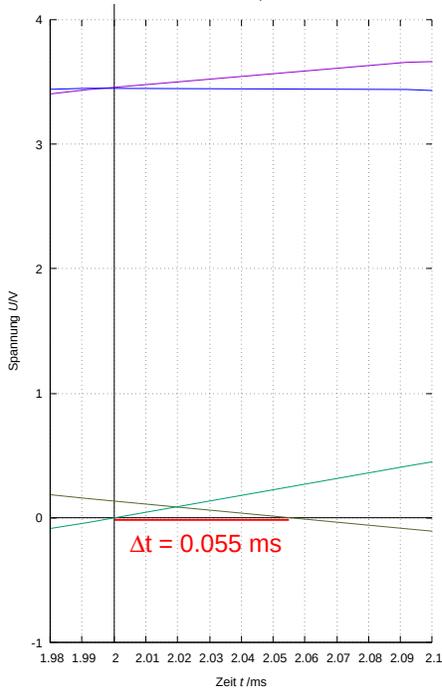


Abb. 6.13: Ausschnitt bei $t = 2$ ms

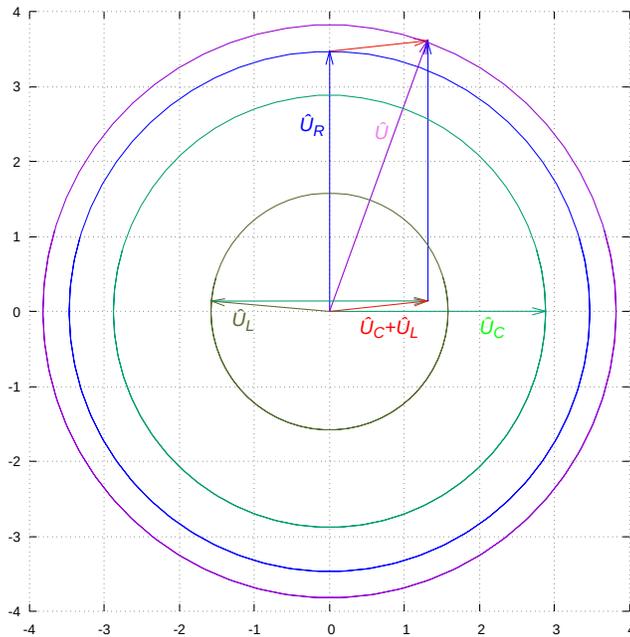


Abb. 6.14: Zeigerdiagramm mit exakten Messdaten

In Abb. 6.14 wurde die Winkelverschiebung zwischen dem \hat{U}_L -Zeiger und dem \hat{U}_C -Zeiger von ca. 5° berücksichtigt. Während ich in den vorangegangenen Abschnitten die Spannungsamplituden als Betragsgrößen behandelt habe, ist dies jetzt nicht mehr möglich. Deshalb habe ich im obigen Zeigerdiagramm den roten Zeiger \hat{U}_{LC} nicht mehr mit $\hat{U}_L - \hat{U}_C$, sondern mit $\hat{U}_L + \hat{U}_C$ bezeichnet, um damit auszudrücken, dass die Zeiger wie Vektoren zu behandeln sind.

Es ist bemerkenswert, mit welcher Präzision die experimentellen Ergebnisse bei der etwas aufwendigeren Auswertung mit den theoretischen Erwartungen übereinstimmen. Dass die Abweichungen im Zusammenhang mit der Induktivität entstehen ist nicht überraschend und wurde schon in Abschnitt 6.1.2 angesprochen.

In das bestehende System lässt sich die Abweichung problemlos einfügen, wenn man zur Spannung am Ohmschen Widerstand den Term $\Delta\hat{U}_R = \hat{U}_L \cdot \sin(\Delta\alpha)$ addiert und zusätzlich \hat{U}_L durch $\hat{U}_L^* = \hat{U}_L \cdot \cos(\Delta\alpha)$ ersetzt. Das führt

zur Korrektur $\hat{U}_R \rightarrow \hat{U}_R^* = \hat{U}_R + \Delta\hat{U}_R$ und $\hat{U}_L \rightarrow \hat{U}_L^*$. In Abschnitt 6.2.2 findet sich ein weitergeführtes Beispiel analog zu dieser Korrektur. Der konsequenteste Ansatz zur Behandlung dieser Fragestellung ist der Übergang zu komplexen Größen, weil hier die Winkelbeziehungen systemimmanent einbezogen sind.

Im Folgenden bleibe ich aber bei unserer seitherigen Schreibweise und vernachlässige die durch $\Delta\alpha$ verursachten Korrekturen. Dazu werden wir auch zu der Übereinkunft zurückkehren, in den Scheitelspannungen nur Beträge zu verstehen und damit die Differenzspannung zwischen Spule und Kondensator mit $\hat{U}_{LC} = \hat{U}_C - \hat{U}_L$ bezeichnen. Aus Abb. 6.12 folgt in Analogie zu dem in Abschnitt 6.1.1 durchgeführten Ansatz: $\hat{U}^2 = \hat{U}_R^2 + (\hat{U}_L - \hat{U}_C)^2$ und damit nach Division durch \hat{I} die Widerstände $Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$ und die Phasenverschiebung φ . Sie beträgt im hier diskutierten Falle $\varphi = -20^\circ$.

Bei Reihenschaltung von Ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand im Wechselstromkreis gilt:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

Häufig findet man auch für Wechselstromwiderstände eine Darstellung im Zeigerdiagramm. Dabei muss man aber beachten, dass diese Diagramme zeitunabhängig sind, im Gegensatz zu den in den vorangegangenen Abschnitten benutzten Diagrammen. Ein Zeigerdiagramm für Stromstärke oder Spannungen dagegen zeigt die Verhältnisse zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt.

6.1.4 Schlussbemerkungen

1. Der Widerstand R wird als Wirkwiderstand bezeichnet. Die frequenzabhängigen Widerstände X_C und X_L nennt man Blindwiderstände und der ebenfalls frequenzabhängige Gesamtwiderstand Z ist der Scheinwiderstand. Beispielsweise gibt es für den unter Abschnitt 6.1.3 definierten Scheinwiderstand Z ein Minimum bei der Frequenz, die der Bedingung $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ genügt, also bei $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$.
2. Die Phasenverschiebung φ zwischen Stromstärke $I(t)$ und Gesamtspannung $U(t)$ ist $\tan(\varphi) = \frac{\hat{U}_L - \hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$. Für $\varphi < 0$ eilt die Stromstärke $I(t)$ der Spannung $U(t)$ voraus (Abb. 6.14), Bei $\varphi > 0$ ist es umgekehrt, und bei $\varphi = 0$ ist $U(t) = U_R(t)$.
3. Für alle Schaltungen gilt: Zwischen der Stromstärke $I_R(t)$ und der Spannung $U_R(t)$ am Ohmschen Widerstand tritt keine Phasenverschiebung auf. Im Falle der Reihenschaltung gilt $I_R = I_L = I_C = I$.

6.2 Parallelschaltung

6.2.1 Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und kapazitivem Widerstand

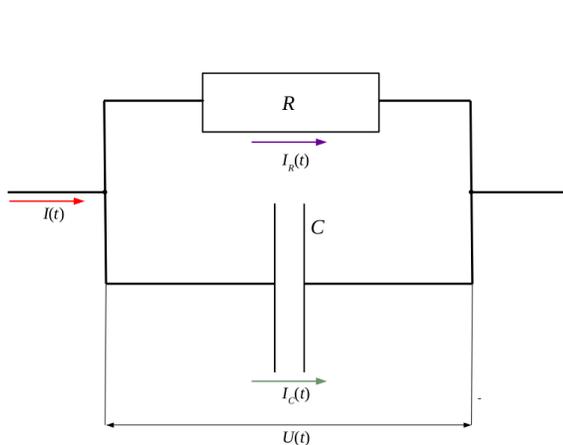


Abb. 6.15: Schaltbild mit Messgrößen

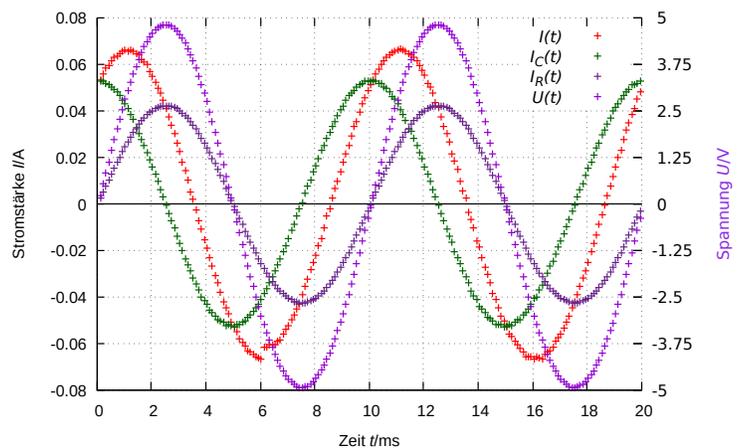


Abb. 6.16: Messpunkte $U(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$, $I_C(t)$

Versuchsdaten: $R = 115\Omega \pm 5\%$; $C = 16\mu F \pm 5\%$; $f = 100\text{Hz}$.

Messergebnisse: $\hat{U} = 4,88\text{V}$; $\hat{I} = 0,0663\text{A}$; $\hat{I}_R = 0,0423\text{A}$; $\hat{I}_C = 0,0527\text{A}$;

Phasenverschiebung: $\Delta t = -1,42\text{ms}$ daraus folgt $\varphi = -51^\circ$

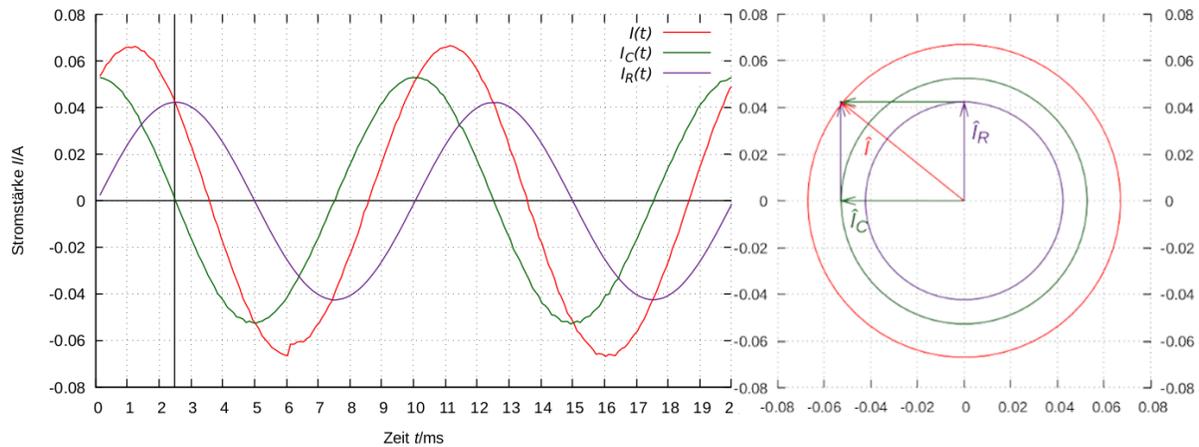


Abb. 6.17: $I(t)$, $I_R(t)$, und $I_C(t)$ und Zeigerdiagramm zum Zeitpunkt $t = 2,5$ ms (Markierungslinie)

Die Grafik ist analog zum Ergebnis der reihengeschalteten Bauelemente, wobei sich hier die Phasenverschiebung und die Winkelbeziehungen auf die Stromstärken auswirken. Grundlage für die Strom-Spannungsbeziehung ist auch hier die Phasengleichheit von I_R und U_R , wobei bei Parallelschaltung $U(t) = U_R(t)$.

Die Kurven geben die Messergebnisse wieder (Abb. 6.16), \hat{I} , \hat{I}_R und \hat{I}_C sind Ergebnis der Messung. Die resultierende Stromstärke im Zeigerdiagramm wurde nach $\hat{I} = \sqrt{\hat{I}_R^2 + \hat{I}_C^2}$ berechnet, so dass ein direkter Vergleich zwischen Messung und Rechnung möglich ist.

Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen bewirkt also eine Phasenverschiebung zwischen den Stromstärken. Die Spannung ist an allen Komponenten zu jedem Zeitpunkt gleich und phasengleich mit der Stromstärke am Ohmschen Widerstand. Die Stromstärke $I_C(t)$ eilt der Stromstärke $I_R(t)$ und damit auch der Spannung $U(t)$ um $\pi/2$ voraus.

Spannung: $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t)$; Gesamtstromstärke: $I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$.

Bei Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und kapazitivem Widerstand gilt:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \text{ und } \tan(\varphi) = \frac{\hat{I}_C}{\hat{I}_R} = \frac{R}{X_C}$$

6.2.2 Parallelschaltung von Ohmschem Widerstand und induktivem Widerstand

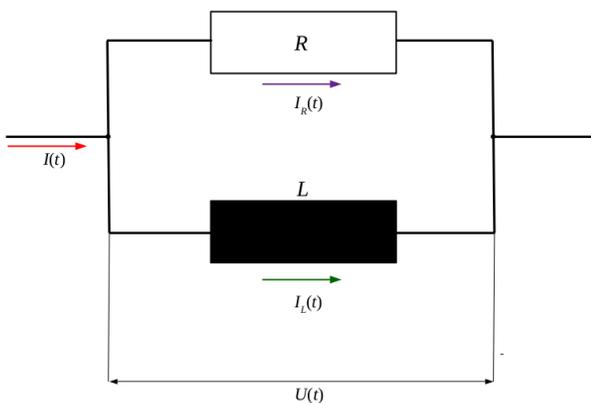


Abb. 6.18: Schaltbild mit Messgrößen

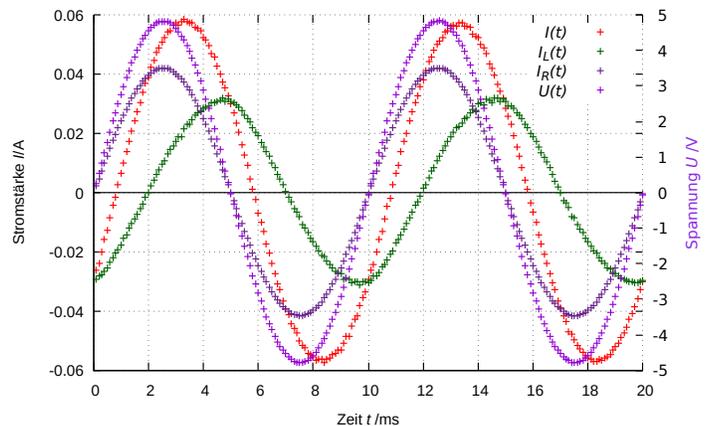


Abb. 6.19: Messpunkte $U(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$, $I_L(t)$

Wie schon bei der Reihenschaltung, ließ sich (jedenfalls mit meinen Mitteln) die zu erwartenden Phasenverschiebung zwischen Stromstärke und Spannung am induktiven Widerstand von $\pi/2$ nicht erreichen. Dies ist in der nachfolgenden Abb. 6.20 deutlich zu erkennen.

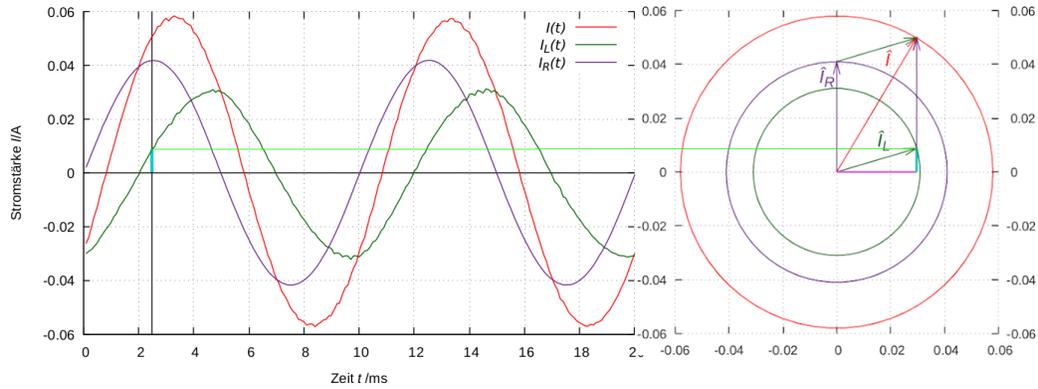


Abb. 6.20: $I(t)$, $I_R(t)$, und $I_L(t)$ und Zeigerdiagramm zum Zeitpunkt $t = 2,5$ ms (Markierungslinie)

Der Winkel α zwischen Stromstärke und Spannung beträgt am induktiven Widerstand $73,4^\circ$. Die Aufspaltung des \hat{I}_L -Zeigers in einen zu \hat{U} orthogonalen Zeiger $\hat{I}_{LL} = \hat{I}_L \cdot \sin(\alpha)$ und einen zu \hat{U} parallelen Zeiger $\hat{I}_{RL} = \hat{I}_L \cdot \cos(\alpha)$ liefert die Anteile der Stromstärken, die zum Scheinwiderstand $X_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_{LL}}$ und zum Wirkwiderstand $R_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_{RL}}$ der Spule beitragen.

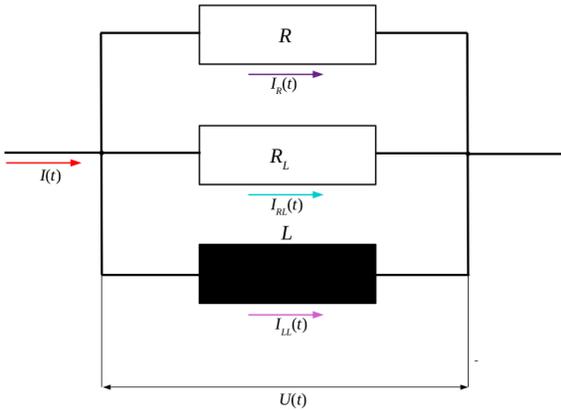


Abb. 6.21: Ersatzschaltbild

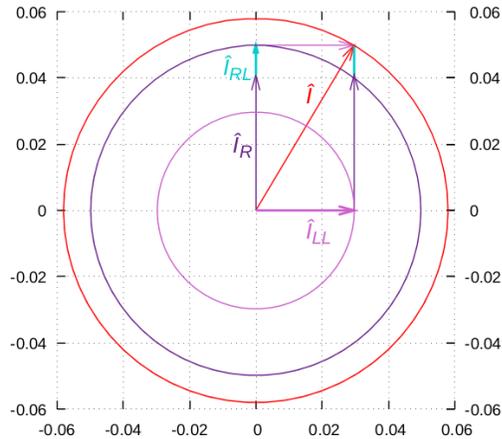


Abb. 6.22: Kreisdiagramm für Ersatzschaltung

Abb. 6.21 zeigt das Ersatzschaltbild der Spule im Rahmen der Schaltung nach Abb. 6.18. Die beiden Schaltelemente R_L und L stellen den Induktiven Widerstand der Spule dar. Sie sind nicht trennbar und auch nicht einzeln messbar. Sie sind Ergebnis einer formalen Analyse der in Abb. 6.17 dargestellten Messdaten mithilfe des Zeigerdiagramms nach Abb. 6.20.

Nach Abb. 6.22 ist der zu \hat{U} parallele Zeiger für den Strom $\hat{I}_W = \hat{I}_R + \hat{I}_{RL}$ und der dazugehörige Wirkwiderstand $R_W = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_W}$, oder nach der bekannten Formel für parallelgeschaltete Ohmsche Widerstände $\frac{1}{R_W} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_L}$. Die zu \hat{U} orthogonale Komponente der Stromstärke \hat{I}_{LL} ergibt nach $X_{LL} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}_{LL}}$ den Blindwiderstand. Der Scheinwiderstand der Schaltung ist dann nach der Formel $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R_W^2} + \frac{1}{X_{LL}^2}}$ und die Phasenverschiebung nach $\tan(\varphi) = \frac{\hat{I}_{LL}}{\hat{I}_W} = \frac{R_W}{X_{LL}}$ zu berechnen.

Zusatzbemerkung: Der Widerstand R_L ist eine rein rechnerische Größe. Es handelt sich nicht um einen Ohmschen Widerstand, er trägt nur in gleicher Weise zur Wirkleistung (siehe unten) der Anordnung bei.

6.3 Weitere Anordnungen von Wechselstromwiderständen

Die Parallelschaltung von Ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand kann ich nicht experimentell darstellen, weil ich nur drei Strommessensoren habe. Die Kombination von Parallel- und Reihenschaltung von induktivem und kapazitivem Widerstand werden unter "Schwingkreis" behandelt.

7 Leistung

Wie Spannung und Stromstärke ist auch die Leistung im Wechselstromkreis eine Zeitfunktion: $P(t) = U(t) \cdot I(t)$. Sind induktive oder kapazitive Bauelemente in der Schaltung, entsteht eine Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Stromstärke und es gilt:

$$U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ und } I(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi).$$

Daraus ergibt sich für die Leistung:

$$P(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

$$P(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

$$P(t) = \hat{P} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi))$$

Nachfolgend habe ich exemplarisch die in Abschnitt 6.21 gemessenen Daten ausgewertet.

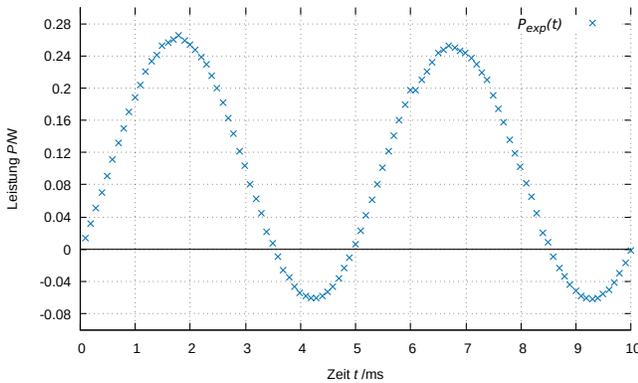


Abb. 7.1: Produkte der Messwerte $U(t)$ und $I(t)$
Formel

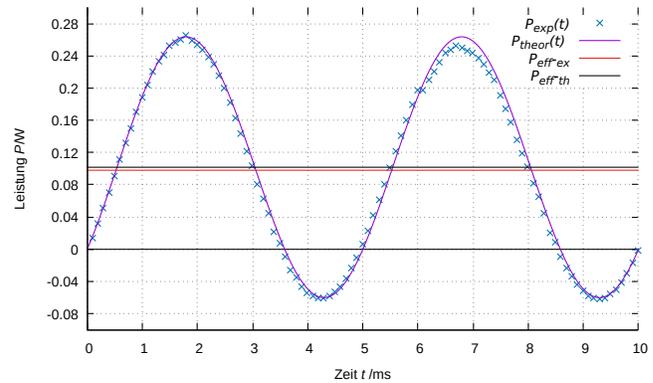


Abb. 7.2: Messwerte und theoretische Werte nach

Die in Abb. 7.1 dargestellten Punkte sind die Produkte aus den einzelnen Messwerten für $U(t)$ und $I(t)$. Die Phasenverschiebung $\varphi = -51^\circ$ zwischen Stromstärke und Spannung bewirkt eine Verschiebung der Grafik in Richtung der negativen P-Achse. In Abb. 7.2 sind zusätzlich zu den Messpunkten drei weitere Funktionen hinzugefügt:

1. $P_{theor}(t) = \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi))$; \hat{P} ist mit den gemessenen Werten $\hat{U} = 4,88\text{V}$ und $\hat{I} = 0,0663\text{A}$ berechnet. $\varphi = 51^\circ$
2. P_{eff-ex} ist durch zeitliche Mittelwertbildung der einzelnen Messpunkte berechnet: $P_{eff-ex} = 0,098\text{W}$
3. $P_{eff-theor}$ ist durch zeitliche Mittelwertbildung von $P_{theor}(t)$ bestimmt. Dazu wird das Integral gebildet:

$$\bar{P}_{theor} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)) dt = \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot \cos(\varphi); \text{Ergebnis: } P_{eff-theor} = 1,02\text{W}$$

Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist also: Die nach außen abgegebene Leistung einer Widerstansanordnung mit Ohmschen, induktiven und kapazitiven Bauteilen ist $P_W = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi) = \hat{U}_{eff} \cdot \hat{I}_{eff} \cdot \cos(\varphi) = P_{eff} \cdot \cos(\varphi)$. Diese Leistung heißt Wirkleistung. Das bedeutet, dass nur ein Teil, der von der Energiequelle (z.B. Netzgerät) gelieferten Leistung Außenwirkung zeigt.

Die restliche Leistung wird im Wechsel von der Quelle aufgenommen und wieder an sie zurückgeben. Diese Leistung heißt Blindleistung und es gilt: $P_B = P_{eff} \cdot \sin(\varphi)$. Die Blindleistung hat allerdings Auswirkungen auf die Phasenbeziehungen im Versorgungsnetz und muss durch Gegenmaßnahmen (z.B. Kondensator) behoben werden.

8 Gleichrichten

Wechselspannung besitzt große Vorteile im Bereich der Energieübertragung, weil sie sich durch Transformatoren sehr einfach in verschiedene Spannungen umwandeln lässt. Auf der anderen Seite benötigen heutzutage die meisten Endgeräte Gleichspannung, die durch Gleichrichter umgewandelt wird.

8.1 Diode

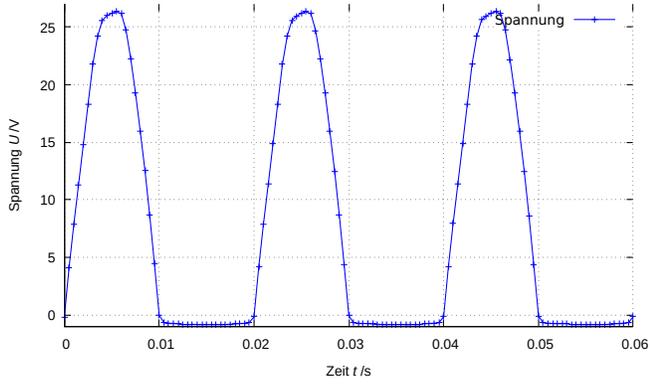


Bild 8.1 Spannungsverlauf an der Diode

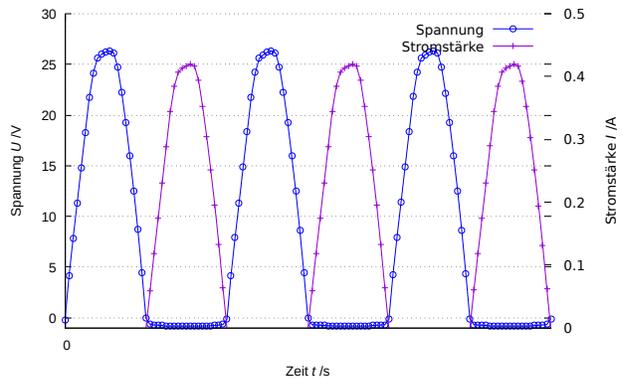


Bild 8.2 Zusätzlich Stromstärkeverlauf

8.2 Graetzschaltung

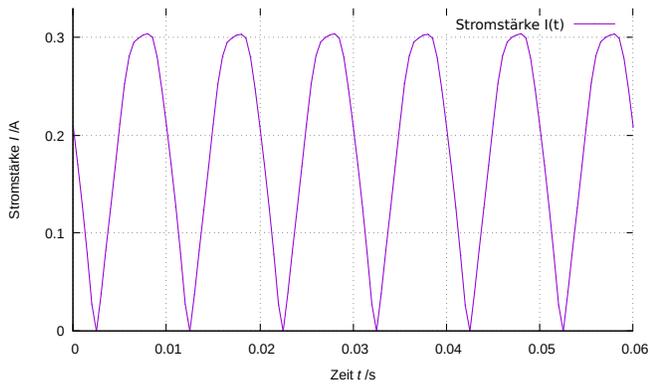


Bild 8.3 Stromstärkeverlauf an der Graetzschaltung

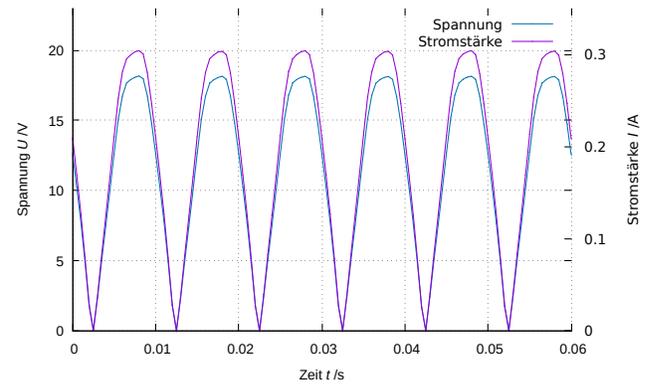


Bild 8.4 zusätzlich Spannungsverlauf